

# Теория бифуркаций

# Теория бифуркаций

# Теория бифуркаций

# Теория бифуркаций

# И. ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ

*В. И. Арнольд, В. С. Афраймович,  
Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников*

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	9
Глава 1. Бифуркации положений равновесия . . . . .	12
§ 1. Семейства и деформации . . . . .	13
1.1. Семейства векторных полей . . . . .	13
1.2. Пространство струй . . . . .	13
1.3. Лемма Сарда и теоремы трансверсальности . . . . .	14
1.4. Простейшие приложения: особые точки типичных векторных полей . . . . .	15
1.5. Топологически версальные деформации . . . . .	16
1.6. Теорема сведения . . . . .	17
1.7. Типичные и главные семейства . . . . .	18
§ 2. Бифуркации особых точек в типичных однопараметрических семействах . . . . .	20
2.1. Типичные ростки и главные семейства . . . . .	20
2.2. Мягкая и жесткая потеря устойчивости . . . . .	20
§ 3. Бифуркации особых точек в многопараметрических семействах общего положения при однократном вырождении линейной части . . . . .	23
3.1. Главные семейства . . . . .	23
3.2. Бифуркационные диаграммы главных семейств ( $3^{\pm}$ ) . . . . .	24
3.3. Бифуркационные диаграммы (относительно слабой эквивалентности) и фазовые портреты главных семейств ( $4^{\pm}$ ) . . . . .	24
§ 4. Бифуркации особых точек векторных полей с двукратным вырождением линейной части . . . . .	26
4.1. Список вырождений . . . . .	26
4.2. Два нулевых собственных значения . . . . .	26
4.3. Редукции к двумерным системам . . . . .	27
4.4. Нулевое и пара чисто мнимых собственных значений . . . . .	28
4.5. Две чисто мнимых пары . . . . .	31
4.6. Главные деформации уравнений трудного типа в задаче о двух мнимых парах (по Жолондеку) . . . . .	35
§ 5. Показатели мягкой и жесткой потери устойчивости . . . . .	39
5.1. Определения . . . . .	39
5.2. Таблица показателей . . . . .	40
Глава 2. Бифуркации предельных циклов . . . . .	42
§ 1. Бифуркации предельных циклов в типичных однопараметрических семействах . . . . .	43
1.1. Мультипликатор 1 . . . . .	43
1.2. Мультипликатор $-1$ и бифуркация удвоения периода . . . . .	45
1.3. Пара комплексно сопряженных мультипликаторов . . . . .	46
1.4. Нелокальные бифуркации в однопараметрических семействах диффеоморфизмов . . . . .	47

1.5.	Нелокальные бифуркации периодических решений	49
1.6.	Бифуркации распада инвариантных торов	49
§ 2.	Бифуркации циклов в типичных двухпараметрических семействах при однократном дополнительном вырождении	52
2.1.	Перечень вырождений	52
2.2.	Мультипликатор 1 или $-1$ с дополнительным вырождением в нелинейных членах	53
2.3.	Пара мультипликаторов на единичной окружности с дополнительным вырождением в нелинейных членах	53
§ 3.	Бифуркации циклов в типичных двухпараметрических семействах при сильных резонансах порядка $q \neq 4$	55
3.1.	Нормальная форма в случае унипотентной жордановой клетки	56
3.2.	Усреднение в слоениях Зейферта и Мёбиуса	57
3.3.	Главные поля и деформации	57
3.4.	Версальность главных деформаций	58
3.5.	Бифуркации стационарных решений периодических дифференциальных уравнений при сильных резонансах порядка $q \neq 4$	58
§ 4.	Бифуркации предельных циклов при прохождении пары мультипликаторов через $\pm i$	62
4.1.	Вырожденные семейства	62
4.2.	Вырожденные семейства, найденные аналитически	63
4.3.	Вырожденные семейства, найденные численно	64
4.4.	Бифуркации в невырожденных семействах	66
4.5.	Предельные циклы систем с симметрией четвертого порядка	66
§ 5.	Конечногладкие нормальные формы локальных семейств	66
5.1.	Обзор результатов	67
5.2.	Определения и примеры	67
5.3.	Общие теоремы и деформации нерезонансных ростков	69
5.4.	Приведение к линейной нормальной форме	71
5.5.	Деформации ростков диффеоморфизмов типа Пуанкаре	71
5.6.	Деформации одиорезонансных гиперболических ростков	72
5.7.	Деформации ростков векторных полей с одним нулевым собственным значением в особой точке	74
5.8.	Функциональные инварианты диффеоморфизмов прямой	75
5.9.	Функциональные инварианты локальных семейств диффеоморфизмов	76
5.10.	Функциональные инварианты семейств векторных полей	77
5.11.	Функциональные инварианты топологической классификации локальных семейств диффеоморфизмов прямой (по Руссари)	77
§ 6.	Универсальность Фейгенбаума для диффеоморфизмов и потоков	79
6.1.	Каскад удвоений	79
6.2.	Перестройки неподвижных точек	80
6.3.	Каскад $l$ -кратных увеличений периода	81
6.4.	Удвоение в гамильтоновых системах	81
6.5.	Оператор удвоения для одномерных отображений	82
6.6.	Механизм универсального удвоения для диффеоморфизмов	84
Глава 3.	Нелокальные бифуркации	86
§ 1.	Вырождения коразмерности 1. Сводка результатов	87
1.1.	Локальные и нелокальные бифуркации	87
1.2.	Негиперболические особые точки	88
1.3.	Негиперболические циклы	90
1.4.	Нетрансверсальные пересечения многообразий	91
1.5.	Контуры	92
1.6.	Бифуркационные поверхности	94
1.7.	Характеристики бифуркаций	95
1.8.	Сводка результатов	97
§ 2.	Нелокальные бифуркации потоков на двумерных поверхностях	97
2.1.	Полулокальные бифуркации потоков на поверхностях	98
2.2.	Нелокальные бифуркации на сфере; однопараметрический случай	99

2.3. Типичные семейства векторных полей . . . . .	100
2.4. Условия типичности . . . . .	102
2.5. Однопараметрические семейства на поверхностях, отличных от сферы . . . . .	102
2.6. Глобальные бифуркации систем с глобальной секущей на торе . . . . .	104
2.7. Некоторые глобальные бифуркации на бутылке Клейна . . . . .	105
2.8. Бифуркации на двумерной сфере. Многопараметрический случай . . . . .	106
2.9. Некоторые открытые вопросы . . . . .	110
§ 3. Бифуркации гомоклинических траекторий негиперболической особой точки . . . . .	111
3.1. Узел по гиперболическим переменным . . . . .	111
3.2. Седло по гиперболическим переменным: одна гомоклиническая траектория . . . . .	112
3.3. Топологическая схема Бернулли . . . . .	112
3.4. Седло по гиперболическим переменным: несколько гомоклинических траекторий . . . . .	113
3.5. Главные семейства . . . . .	114
§ 4. Бифуркации гомоклинических траекторий негиперболического цикла . . . . .	115
4.1. Структура семейства гомоклинических траекторий . . . . .	115
4.2. Критические и некритические циклы . . . . .	116
4.3. Рождение гладкого двумерного аттрактора . . . . .	116
4.4. Рождение сложных инвариантных множеств (некритический случай) . . . . .	117
4.5. Критический случай . . . . .	118
4.6. Двухшаговый переход от устойчивости к турбулентности . . . . .	121
4.7. Некомпактное множество гомоклинических траекторий . . . . .	121
4.8. Переменяемость . . . . .	122
4.9. Достижимость, недостижимость . . . . .	122
4.10. Устойчивость семейств диффеоморфизмов . . . . .	124
4.11. Некоторые открытые вопросы . . . . .	126
§ 5. Гиперболические особые точки с гомоклинической траекторией . . . . .	127
5.1. Предварительные понятия: ведущие направления и седловые величины . . . . .	127
5.2. Бифуркации гомоклинических траекторий седла, происходящие на границе множества систем Морса — Смейла . . . . .	127
5.3. Требования общности положения . . . . .	128
5.4. Главные семейства в $\mathbb{R}^3$ и их свойства . . . . .	129
5.5. Версальность главных семейств . . . . .	132
5.6. Седло с комплексным ведущим направлением в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	133
5.7. Добавление: бифуркации гомоклинических петель вне границы множества систем Морса — Смейла . . . . .	137
§ 6. Бифуркации, связанные с нетрансверсальными пересечениями . . . . .	138
6.1. Векторные поля без контуров и гомоклинических траекторий . . . . .	138
6.2. Теорема о недостижимости . . . . .	139
6.3. Модули . . . . .	140
6.4. Системы с контурами . . . . .	141
6.5. Диффеоморфизмы с нетривиальными базисными множествами . . . . .	141
6.6. Векторные поля в $\mathbb{R}^3$ с гомоклинической траекторией цикла . . . . .	142
6.7. Символическая динамика . . . . .	143
6.8. Бифуркации «подков Смейла» . . . . .	145
6.9. Векторные поля на бифуркационной поверхности . . . . .	147
6.10. Диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических траекторий . . . . .	148
§ 7. Бесконечные неблуждающие множества . . . . .	149
7.1. Векторные поля на двумерном торе . . . . .	149
7.2. Бифуркации систем с двумя гомоклиническими кривыми седла . . . . .	150
7.3. Системы с аттракторами Фейгенбаума . . . . .	151
7.4. Рождение неблуждающих множеств . . . . .	152

7.5. Сохранение и гладкость инвариантных многообразий (по Фенichelю)	153
7.6. Вырожденное семейство и его окрестность в функциональном пространстве	154
7.7. Рождение торов в трехмерном фазовом пространстве	155
§ 8. Аттракторы и их бифуркации	156
8.1. Вероятностно предельные множества (по Милнору)	157
8.2. Статистически предельные множества	157
8.3. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов	159
8.4. Внутренние бифуркации и кризисы положений равновесия и циклов	160
8.5. Бифуркации двумерного тора	161
Глава 4. Релаксационные колебания	165
§ 1. Основные понятия	166
1.1. Пример. Уравнение Ван дер Поля	166
1.2. Быстрые и медленные движения	167
1.3. Медленная поверхность и медленное уравнение	168
1.4. Медленное движение как аппроксимация возмущенного	169
1.5. Явление срыва	170
§ 2. Особенности быстрого и медленного движений	171
2.1. Особенности быстрого движения в точках срыва систем с одной быстрой переменной	171
2.2. Особенности проектирования медленной поверхности	173
2.3. Медленное движение систем с одной медленной переменной	174
2.4. Медленное движение систем с двумя медленными переменными	175
2.5. Нормальные формы фазовых кривых медленного движения	176
2.6. Связь с теорией уравнений, не разрешенных относительно производной	179
2.7. Вырождение контактной структуры	181
§ 3. Асимптотика релаксационных колебаний	183
3.1. Вырожденные системы	183
3.2. Системы первого приближения	184
3.3. Нормализация быстро-медленных уравнений с двумя медленными переменными при $\epsilon > 0$	185
3.4. Вывод систем первого приближения	188
3.5. Исследование систем первого приближения	188
3.6. Воронки	190
3.7. Периодические релаксационные колебания на плоскости	190
§ 4. Затягивание потери устойчивости при переходе пары собственных значений через мнимую ось	192
4.1. Типичные системы	192
4.2. Затягивание потери устойчивости	193
4.3. Жесткость потери устойчивости в аналитических системах типа 2	194
4.4. Гистерезис	195
4.5. Механизм затягивания	195
4.6. Вычисление момента срыва в аналитических системах	196
4.7. Затягивание при потере устойчивости циклом	199
4.8. Затягивание потери устойчивости и «утки»	199
§ 5. Решения-утки	199
5.1. Пример: особая точка на складке медленной поверхности	200
5.2. Существование решений-уток	202
5.3. Эволюция простых вырожденных уток	203
5.4. Полулокальное явление: утки с релаксацией	204
5.5. Утки и $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^n$	205
Рекомендуемая литература	207
Литература	209



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Слово «бифуркация» означает «раздвоение» и употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе: динамической, экологической и т. д. Наш обзор посвящен бифуркациям фазовых портретов дифференциальных уравнений — не только бифуркациям положений равновесия и предельных циклов, но перестройкам системы в целом и, прежде всего, ее инвариантных множеств и аттракторов. Такая постановка проблемы восходит к А. А. Андронову.

Связи с теорией бифуркаций пронизывают все естествознание. Дифференциальные уравнения, описывающие реальные физические системы, всегда содержат параметры, точные значения которых, как правило, неизвестны. Если уравнение, моделирующее физическую систему, оказывается структурно неустойчивым, то есть поведение его решений может качественно измениться при сколь угодно малом изменении правой части, то необходимо понять, какие бифуркации фазового портрета происходят при изменении параметров.

Часто модельные системы оказываются настолько громоздкими, что не допускают содержательного исследования, прежде всего из-за обилия входящих в них переменных. При изучении таких систем часть переменных, мало меняющихся в ходе процесса, как правило, полагают постоянными. В результате получается система с меньшим количеством переменных, которая и исследуется. Однако учесть влияние отброшенных членов в исходной модели, рассматриваемой «индивидуально», зачастую невозможно. В этом случае отброшенные члены можно рассматривать как типичные возмущения, и описывать исходную модель средствами теории бифуркаций.

Перефразируя известные слова Пуанкаре о периодических решениях, можно сказать, что бифуркации, как факелы, освещают путь от исследованных динамических систем к неисследованным. Эту роль теории бифуркаций использовали Л. Д. Ландау и позже Э. Хопф, предложившие эвристическое описание перехода от ламинарного течения к турбулентному при возрастании числа Рейнольдса. В сценарии Ландау этот переход осуществлялся через бифуркации торов все возрастающей размерности. После того, как зоопарк динамических систем и их бифуркаций необозримо разросся, появилась масса работ, описывающих, в основном на физическом уровне строгости, переход от регулярного (ламинарного) движения к хаотическому (турбулентному). С помощью исследования цепочки бифуркаций объяснено хаотическое поведение трехмодовой модели Лоренца конвективного движения; это объяснение не вошло в настоящий обзор, поскольку в него, по соображениям объема,

не включены бифуркации в системах с симметриями: система Лоренца центрально симметрична.

К теории бифуркаций, в которой параметры не меняются с течением времени, тесно примыкает теория релаксационных колебаний, изучающая семейства, в которых параметры с течением времени медленно меняются (эти параметры называются «медленными переменными»). В «быстро-медленные» системы теории релаксационных колебаний входит параметр медленности — характерная скорость изменения медленных переменных. При нулевом значении этого параметра быстро-медленная система превращается в семейство, изучаемое в теории бифуркаций; при ненулевом возникают специфические явления, иногда называемые «динамическими бифуркациями».

В обзоре систематически используется связь теории бифуркаций с теорией особенностей. Решение многих, в основном, локальных, проблем теории бифуркаций состоит в том, чтобы предъявить и исследовать так называемое главное семейство — своего рода топологическую нормальную форму для семейств исследуемого класса. Теория особенностей позволяет угадать и частично исследовать главные семейства. Она описывает также бифуркации положений равновесия, особенности медленной поверхности, медленные движения в теории релаксационных колебаний и т. д.

Отметим также, что для нелокальной теории бифуркаций оказываются особенно полезными конечногладкие нормальные формы локальных семейств дифференциальных уравнений. Эти нормальные формы значительно упрощают отыскание и исследование бифуркаций, а также обоснование и исследование полученных результатов. С другой стороны, нелокальная теория бифуркаций позволяет выделить задачи теории нормальных форм, важные для приложений. На наш взгляд, связь между теорией нормальных форм и нелокальной теорией бифуркаций в настоящее время используется недостаточно.

Наряду с известными, обзор включает ряд новых результатов; некоторые из них известны авторам из частных сообщений. К ним относятся: полное исследование бифуркаций положений равновесия в типичных двупараметрических семействах векторных полей на плоскости с двумя пересекающимися инвариантными прямыми (так называемая редуцированная задача о двух мнимых парах, Жолондек, п.п. 4.5, 4.6 главы 1); построение конечногладких нормальных форм и функциональных модулей  $C^1$ -классификации локальных семейств векторных полей и диффеоморфизмов (совместно с С. Ю. Яковенко, п.п. 5.7—5.10 главы 2); построение топологического инварианта векторных полей с гомоклинической траекторией седла, имеющего комплексные собственные значения (п. 5.6 главы 3); описание типичной двупараметрической деформации векторного поля с двумя гомоклиническими кривыми седла, причем бифуркацион-

ная диаграмма деформации содержит континуум компонент (Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, п. 7.2 главы 3); определение «статистически предельного множества» — возможного кандидата на понятие «физического аттрактора» (п. 8.5 главы 3); указание связи между теориями неявных уравнений и релаксационных колебаний и нормализация медленных движений для быстро-медленных систем с одной и двумя медленными переменными (п.п. 2.2—2.7 главы 4); нормализация быстро-медленных уравнений, написание и исследование систем первого приближения (п.п. 3.2—3.5 главы 4); исследование затягивания потери устойчивости в типичных быстро-медленных системах при переходе пары собственных значений устойчивой особой точки быстрого уравнения через мнимую ось (динамическая бифуркация рождения цикла; А. И. Нейштадт, § 4 главы 4). Отметим также гипотезу о бифуркациях в типичных многопараметрических семействах векторных полей на плоскости, тесно связанную с шестнадцатой проблемой Гильберта (п. 2.8 главы 3).

Наш обзор, естественно, является неполным. Мы не включили в него, сравнительно немногочисленные, работы о локальных бифуркациях в трехпараметрических семействах и о нелокальных бифуркациях в двухпараметрических семействах; некоторые ссылки даны в списке литературы. В описании нелокальных бифуркаций мы ограничились только теми, которые происходят на границе множества систем Морса—Смейла. Теория таких бифуркаций в значительной части завершена, хотя и недостаточно широко известна: посвященные ей работы математиков Горьковской школы зачастую публиковались в труднодоступных источниках. Не исследована та часть границы множества систем Морса—Смейла, на которой возникает счетное множество неблуждающих траекторий; этой проблеме посвящен § 7 главы 3. Для сохранения единства стиля мы формулируем известные результаты зачастую не в том виде, как в первоисточниках.

Главы 1 и 2, кроме п. 1.6, написаны В. И. Арнольдом и Ю. С. Ильяшенко. Глава 3, в ее окончательной редакции, написана В. С. Афрамовичем и Ю. С. Ильяшенко при участии В. И. Арнольда и Л. П. Шильникова. Пункт 1.6 главы 2 написан В. С. Афрамовичем. Параграфы 1 и 2 главы 4 написаны В. И. Арнольдом, § 3, кроме п. 3.7, Ю. С. Ильяшенко. Пункт 3.7 главы 4 написан Н. Х. Розовым, § 4 — А. И. Нейштадтом, § 5 — А. К. Звонкиным. Авторы приносят им свою искреннюю благодарность. Список литературы не претендует на полноту. При его составлении мы исходили из тех же принципов, что и в обзоре [26]; в частности, использовалась система двойных ссылок —  $[a : b]$  или  $[a, \text{стр. } b]$ . Первое обозначает работу  $[b]$  из списка литературы в  $[a]$ , второе — работу, цитированную в  $[a]$  на стр.  $[b]$ . Знак ▲ указывает конец некоторых формулировок.

## Глава 1

### БИФУРКАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

*Теория бифуркаций* динамических систем описывает качественные, скачкообразные изменения фазовых портретов дифференциальных уравнений при непрерывном, плавном изменении параметров. Так, при потере устойчивости особой точкой может возникнуть предельный цикл, а при потере устойчивости предельным циклом — хаос. Такого рода изменения называются *бифуркациями*.

В этой и следующей главах рассматриваются только локальные бифуркации, то есть бифуркации фазовых портретов вблизи особых точек и предельных циклов.

В дифференциальных уравнениях, описывающих реальные физические явления, чаще всего встречаются особые точки и предельные циклы общего положения, то есть гиперболические. Однако встречаются и специальные классы дифференциальных уравнений, где дело обстоит иначе. Таковы, например, системы, обладающие симметриями, связанными с природой описываемого явления, а также гамильтоновы уравнения, обратимые системы, уравнения, сохраняющие фазовый объем. Так, например, рассмотрим однопараметрическое семейство динамических систем на прямой с симметрией второго порядка:

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon), \quad v(-x, \varepsilon) = -v(x, \varepsilon).$$

Типичная бифуркация симметричного положения равновесия в такой системе («трезубец») изображена на рис. 1 ( $v = x(\varepsilon - x^2)$ ). Она состоит в том, что от теряющего устойчивость симметричного положения равновесия ответвляется два новых, менее симметричных, положения равновесия. При этом симметричное положение равновесия сохраняется, но теряет устойчивость.

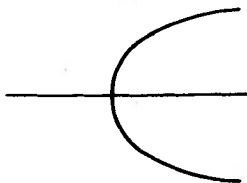


Рис. 1. Бифуркация положений равновесия в симметричной системе

В типичном однопараметрическом семействе общих (несимметричных) систем трезубцы не встречаются. При типичном малом возмущении семейства (хотя бы чуть-чуть нарушающем симметрию) трезубец на рис. 1 превратится в одну из четырех

кривых (рис. 2). Из этих рисунков видно, что явления, происходящие при плавном, медленном изменении параметра в идеализированной строго симметричной системе и в возмущенной системе, качественно различны. Поэтому учет влияния малых нарушений симметрии необходим для анализа бифуркаций в симметричной системе, если такие нарушения вообще возможны. С другой стороны, иногда встречаются и строго симметричные по самой сути дела модели (таковы, например, нормальные формы; см. ниже § 3). В этих случаях необходимо исследовать бифуркации симметричных систем в классе возмущений, не нарушающих симметрии.

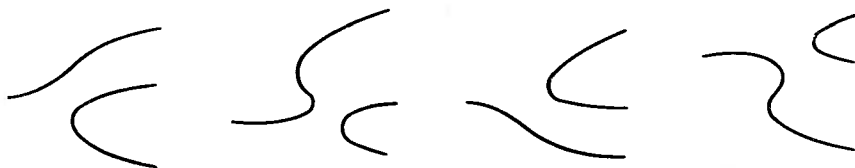


Рис. 2. Бифуркации положений равновесия в системе, близкой к симметричной

Вырожденные случаи неустранимы малым шевелением, если рассматривается не индивидуальное уравнение, а семейство уравнений. Поэтому при исследовании вырожденного случая основную ценность представляет не изучение индивидуального вырожденного уравнения, а анализ бифуркаций в семействах общего положения, в которых подобное вырождение встречается неустранимым образом. Технически это исследование проводится с помощью построения специальных — так называемых версальных — деформаций, в некотором смысле содержащих все остальные.

## § 1. Семейства и деформации

В этом параграфе формулируются теоремы трансверсальности и «принцип сведения», позволяющий понижать размерность фазового пространства за счет своего рода отбрасывания несущественных (гиперболических) переменных.

**1.1. Семейства векторных полей.** Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in B \subset \mathbb{R}^k.$$

Область  $U$  называется *фазовым пространством*,  $B$  — *пространством параметров* (или *базой семейства*),  $V$  — семейством векторных полей на  $U$  с базой  $B$ . Всюду далее, если не оговорено противное, рассматриваются только гладкие семейства ( $v$  класса  $C^\infty$ ).

**1.2. Пространство струй.** Пусть  $U$  и  $W$  — области вещественно линейных пространств  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$ . Если в пространствах  $\mathbb{R}^n$

и  $\mathbb{R}^m$  выбрать системы координат, то  $k$ -струя отображения  $U \rightarrow W$  в точке  $x$  будет задаваться векторным тейлоровским многочленом степени  $\leq k$  в точке  $x$ . Тем самым, множество всех  $k$ -струй отображений  $U$  в  $W$  отождествляется с произведением  $U \times \times \{ \text{пространство } m\text{-компонентных векторных многочленов от } n \text{ переменных степени не больше } k \text{ с принадлежащими } W \text{ свободными членами} \}$  и потому является гладким многообразием. Многообразию  $k$ -струй отображений  $U$  в  $W$  обозначается через  $J^k(U, W)$ .

Аналогично определяется многообразие  $J^k(M, N)$   $k$ -струй отображений гладкого многообразия  $M$  в гладкое многообразие  $N$ .

**1.3. Лемма Сарда и теоремы трансверсальности.** Рассмотрим гладкое отображение  $f: U \rightarrow W$ . Точка-прообраз называется *нерегулярной*, если образ производной в этой точке — не все касательное пространство к образу:

$$f_*(x)T_x U \neq T_{f(x)}W.$$

Значение  $f$  в нерегулярной точке называется нерегулярным значением.

**Лемма Сарда.** Множество нерегулярных значений гладкого отображения имеет лебегову меру нуль.

На этой лемме основаны формулируемые ниже теоремы трансверсальности.

**Определение.** Два линейных подпространства  $X$  и  $Y$  линейного пространства  $L$  называются *трансверсальными*, если их прямая сумма есть все пространство:  $X \oplus Y = L$ .

Всюду в этом пункте  $A$  и  $B$  — гладкие многообразия,  $C$  — гладкое подмногообразие  $B$ .

**Определение.** Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *трансверсальным* к  $C$  в точке  $a$  из  $A$ , если либо  $f(a)$  не принадлежит  $C$ , либо касательная плоскость к  $C$  в точке  $f(a)$  и образ касательной плоскости к  $A$  в точке  $a$  трансверсальны:

$$f_*(a)T_a A \oplus T_{f(a)}C = T_{f(a)}B.$$

**Определение.** Отображение  $f: A \rightarrow B$  трансверсально к  $C$ , если оно трансверсально к  $C$  в каждой точке из многообразия — прообраза.

**Замечание.** Если  $\dim A + \dim C < \dim B$  и отображение  $f: A \rightarrow B$  трансверсально  $C$ , то пересечение  $f(A) \cap C$  пусто.

Обозначим через  $C^r(U, W)$  пространство  $r$ -гладких отображений  $U$  в  $W$ .

**Слабая теорема трансверсальности для областей пространства  $\mathbb{R}^n$ .** Пусть  $C$  — гладкое подмногообразие в  $W$ . В пространстве  $C^r(U, W)$  всюду плотное счетное пересечение открытых множеств<sup>1)</sup> образуют отображения

<sup>1)</sup> Такие пересечения называются иногда *густыми множествами*.

$f: U \rightarrow W$ , трансверсальные  $C$  (при условии, что  $r > \max(\dim W - \dim U - \dim C, 0)$ ).

Слабая теорема трансверсальности для многообразий. Пусть  $A$  — компактное многообразие и  $C$  — компактное подмногообразие в многообразии  $B$ . Тогда отображение  $f: A \rightarrow B$ , трансверсальные к  $C$ , образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех  $r$ -гладких отображений  $A$  в  $B$  ( $r > \max(\dim B - \dim A - \dim C, 0)$ ).

Замечание. Если одно из многообразий  $A$  или  $C$  некомпактно, то «открытое всюду плотное множество» нужно заменить на «густое множество».

Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия (или области в векторных пространствах). С каждым отображением связано его « $k$ -струйное расширение»  $f: M \rightarrow J^k(M, N)$ ; точке  $x$  из  $M$  сопоставляется  $k$ -струя отображения  $f$  в точке  $x$ .

Теорема трансверсальности Тома. Пусть  $C$  — собственное подмногообразие пространства струй  $J^k(M, N)$ . Тогда множество отображений  $f: M \rightarrow N$ ,  $k$ -струйные расширения которых трансверсальны к  $C$ , образует густое множество в пространстве всех отображений из  $M$  в  $N$  с  $C^r$ -топологией (при условии, что  $r > r_0(k, \dim M, \dim N)$ ).

**1.4. Простейшие приложения: особые точки типичных векторных полей.** Всюду в этом пункте «типичные поля или семейства» — это поля или семейства из некоторого густого подмножества соответствующего функционального пространства. Векторные поля задаются на области пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Теорема. Для типичного семейства векторных полей множество особых точек семейства образует гладкое подмногообразие в прямом произведении фазового пространства на пространство параметров.

◀ Множество особых точек полей семейства имеет вид  $\{(x, \varepsilon) \mid v(x, \varepsilon) = 0\}$ . По лемме Сарда множество критических значений отображения  $v$  имеет меру нуль. Следовательно, существует вектор  $\delta$  произвольно малой длины, для которого  $-\delta$  — не критическое значение отображения  $v$ . Множество  $\{v(x, \varepsilon) = -\delta\}$  — гладкое многообразие по теореме о неявной функции. Но это многообразие есть множество особых точек векторных полей семейства  $v(x, \varepsilon) + \delta$ . ▶

Проектирование построенного многообразия равновесий на пространство параметров является гладким отображением. Теория особенностей гладких отображений (в частности, проекций) доставляет классификацию критических точек типичных отображений (а следовательно, и бифуркаций положений равновесия в типичных семействах).

Например, если параметр всего один, то типичная бифуркация, с точностью до расслоенного над осью параметра диффеоморфизма, такая же, как в семействе с кривой равновесий  $\varepsilon = \pm x^2$  (рождение или смерть пары равновесий). Если параметр

ров два, то проектирование приводится к одной из нормальных форм

$$\varepsilon_1 = \pm x^2 \quad (\text{складка}),$$

$$\varepsilon_1 = x^3 \pm \varepsilon_2 x \quad (\text{сборка Уитни}).$$

**Теорема.** Все особые точки типичного векторного поля невырождены (не имеют нулевых собственных чисел).

◀ Пусть  $v$  — векторное поле с фазовым пространством  $U$ . Рассмотрим отображение  $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . В качестве подмногообразия  $S$  рассмотрим точку  $0$ . По слабой теореме трансверсальности, отображение  $v$  общего положения трансверсально  $S$ . Но это и означает невырожденность особых точек векторного поля  $v$ . ▶

**Теорема.** Все особые точки типичного векторного поля — гиперболические.

◀ Рассмотрим 1-струйное расширение отображения  $v$  фазового пространства  $U$  в  $\mathbb{R}^n$ . Пространство  $J^1(U, \mathbb{R}^n)$  состоит из точек вида  $(x, y, A)$ , где  $x \in U$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Образ фазового пространства  $U$  под действием 1-струйного расширения отображения  $v$  состоит из точек  $(x, v(x), \partial v / \partial x(x))$ . Обозначим через  $S$  алгебраическое подмногообразие в  $J^1(U, \mathbb{R}^n)$ , состоящее из точек вида  $((x, 0, A) \mid \text{оператор } A \text{ имеет хотя бы одно собственное значение на мнимой оси})$ . Это алгебраическое многообразие имеет коразмерность  $n+1$ ; оно не является гладким многообразием, но является объединением гладких, вообще говоря, не компактных многообразий коразмерности не меньше  $n+1$ . Размерность  $U$  равна  $n$ . По теореме трансверсальности образ  $\hat{v}(U)$  для векторного поля  $v$  общего положения не пересекает  $S$ . ▶

**1.5. Топологически версальные деформации.** Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений  $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$ .

*Локальным семейством векторных полей*  $(v; x_0, \varepsilon_0)$  называется росток поля  $v$  в точке  $(x_0, \varepsilon_0)$  прямого произведения фазового пространства и пространства параметров; представителями таких ростков являются семейства векторных полей<sup>1)</sup>.

*Эквивалентность* локальных семейств  $(v; x, \varepsilon_0)$  и  $(w; y_0, \eta_0)$  задается ростком гомеоморфного отображения  $H$  произведения фазового пространства и пространства параметров первого семейства на аналогичное произведение для второго семейства; росток рассматривается в точке  $(x_0, \varepsilon_0)$ ;  $H(x_0, \varepsilon_0) = (y_0, \eta_0)$ . Представитель ростка  $H$  расслоен над базой семейства, то есть  $H: (x, \varepsilon) \mapsto (y, \eta) = (H_1(x, \varepsilon), H_2(\varepsilon))$ . Отображение  $H(\cdot, \varepsilon)$  — гомеоморфизм, переводящий фазовые кривые вектор-

<sup>1)</sup> Подчеркнем различие между локальным семейством и семейством ростков векторных полей: поля локального семейства определены в общей окрестности точки  $x_0$ , не зависящей от  $\varepsilon$ , достаточно близкого к  $\varepsilon_0$ . Поля «семейства ростков» этим свойством не обладают.



ного поля  $v(\cdot, \varepsilon)$  (в области определения  $H$ ) в фазовые кривые векторного поля  $w(\cdot, \varepsilon)$  с сохранением направления движения.

Заметим, что при  $\varepsilon \neq \varepsilon_0$  точка  $x_0$  не обязательно переводится отображением  $H(\cdot, \varepsilon)$  в точку  $y_0$ .

*Слабая эквивалентность* локальных семейств векторных полей определяется так же, только росток  $H$  не должен быть непрерывным: представитель ростка  $H$  — семейство диффеоморфизмов  $H(\cdot, \varepsilon)$ , определенных в общей окрестности точки  $x_0$ , но не обязательно непрерывных по  $\varepsilon$ .

Два локальных семейства *строго эквивалентны*, если они эквивалентны, имеют общую базу, и сопрягающий гомеоморфизм  $H$  сохраняет значение параметра:  $H(x, \varepsilon) = (H_1(x, \varepsilon), \varepsilon)$ .

Локальное семейство  $(u; x_0, \mu_0)$  называется *индуцированным* из локального семейства  $(v; x_0, \varepsilon_0)$ , если существует росток в точке  $\mu_0$  непрерывного отображения  $\Phi$  пространства параметров в пространство параметров:  $\mu \rightarrow \varepsilon = \Phi(\mu)$  такой, что

$$u(x, \mu) = v(x, \Phi(\mu)), \quad \Phi(\mu_0) = \varepsilon_0.$$

Локальное семейство называется *топологически орбитально версальной* (короче, просто *версальной*) деформацией роста поля  $v_0 = v(\cdot, \varepsilon_0)$  в точке  $x_0$ , если всякое другое локальное семейство, содержащее тот же росток, строго эквивалентно индуцированному из данного.

*Слабо версальная* деформация ростка определяется так же, только «эквивалентность» заменяется «слабой эквивалентностью».

Рассмотрим группу  $G$  диффеоморфизмов многообразия  $M$ , например, группу линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$ , скажем группу  $S_2$  симметрий плоскости относительно фиксированной прямой, проходящей через нуль, или группу  $Z_q$  поворотов плоскости на углы  $2\pi r/q$ . Если в предыдущих определениях ростки векторных полей и гомеоморфизмов считать  $G$ -эквивариантными, то получится определение  *$G$ -эквивариантной версальной деформации*  $G$ -эквивариантного ростка векторного поля. (Напомним, что векторное поле на  $M$  или его росток в точке  $0$   $G$ -эквивариантны, если поле (росток) переходит в себя при всех отображениях  $g \in G$ . Росток гомеоморфизма в точке  $0$  пространства  $\mathbb{R}^n$   $G$ -эквивариантен, если он перестановочен со всеми отображениями группы  $G$ .)

Указание и исследование версальной деформации ростка векторного поля является способом концентрированного представления результатов очень полного исследования бифуркаций фазового портрета.

**1.6. Теорема сведения.** Рассмотрим семейство векторных полей, зависящих от конечномерного параметра. Предположим, что поле  $v(\cdot, 0)$  имеет особую точку  $x=0$  и что соответствующее характеристическое уравнение имеет  $s$  корней в левой полуплоскости,  $u$  в правой полуплоскости и  $c$  на мнимой оси.

Определения. 1. *Надстройка седла* (с  $s$ -мерным устойчивым и  $u$ -мерным неустойчивым многообразием,  $s \geq 0$ ,  $u \geq 0$ ) над семейством

$$\dot{x} = \omega(x, \varepsilon)$$

называется семейство

$$\dot{x} = \omega(x, \varepsilon), \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = z, \quad y \in \mathbb{R}^s, \quad z \in \mathbb{R}^u.$$

2. *Центральным многообразием* локального семейства  $(v; 0, 0)$ ,  $v(0, 0) = 0$ , называется центральное многообразие в точке  $(0, 0)$  соответствующей системы

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon), \quad \dot{\varepsilon} = 0.$$

Теорема сведения ([117], [20]). Локальное семейство векторных полей  $(v; 0, 0)$ ,  $v(0, 0) = 0$  топологически эквивалентно надстройке седла над ограничением семейства на его центральное многообразие. Это ограничение (обозначим его  $(w; 0, 0)$ ) представляет собой локальное семейство с  $c$ -мерным фазовым пространством, где  $c$  — размерность центрального многообразия ростка  $v(\cdot, 0)$ . Если локальное семейство  $(w; 0, 0)$  является версальной деформацией ростка  $w(\cdot, 0)$ , то исходное семейство  $(v; 0, 0)$  является версальной деформацией ростка  $v(\cdot, 0)$ . ▲

З а м е ч а н и е. Росток в нуле системы

$$\dot{\xi} = w(\xi, \varepsilon), \quad \dot{\varepsilon} = 0$$

топологически эквивалентен ростку ограничения системы

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon), \quad \dot{\varepsilon} = 0$$

на ее центральное многообразие в точке 0; сопрягающий гомеоморфизм сохраняет  $\varepsilon$ .

1.7. *Типичные и главные семейства.* Начнем с определения. Рассмотрим семейство векторных полей  $v(\cdot, \varepsilon)$ . Топологическая орбитальная эквивалентность или слабая эквивалентность определяет разбиение пространства параметров на классы. Это разбиение называется *бифуркационной диаграммой* семейства. Если не сказано, какое отношение эквивалентности использовано при построении бифуркационной диаграммы, то подразумевается обычная эквивалентность.

Полное топологическое исследование деформаций ростков векторных полей в особой точке (в случае, когда его удается осуществить) проводится по следующему плану.

1. Класс деформируемых ростков, имеющих то или иное вырождение, например, нулевое собственное значение в особой точке, делится на два подмножества: типичных и вырожденных. Типичные ростки образуют в рассматриваемом классе открытое всюду плотное множество, а вырожденные — подмножество ко-размерности 1 или выше. Например, в классе ростков

$(ax^2 + \dots)$   $d/dx$  векторных полей в особой точке с нулевым собственным значением на прямой типичные ростки выделяются требованием  $a \neq 0$ , а вырожденные — требованием  $a = 0$ .

2. Выписываются *главные семейства*, соответствующие данному классу. Это — стандартные семейства, играющие роль «топологических нормальных форм» для деформаций типичных ростков изучаемого класса. Росток, топологически эквивалентный деформируемому, соответствует в главном семействе нулевому значению параметров.

3. Изучаются бифуркационные диаграммы для главных семейств и фазовые портреты уравнений этих семейств. Для описанных ниже главных семейств некоторая окрестность нуля в базе семейства разбивается на конечное число подмножеств (стратов). Объединение открытых стратов образует дополнение к бифуркационной диаграмме. Любые два поля, соответствующие значениям параметров из одного страта, топологически эквивалентны в некоторой (общей для всех близких к нулю значений параметров) окрестности нуля в фазовом пространстве.

4. Для каждого страта описывается (с точностью до гомеоморфизма) фазовый портрет соответствующего векторного поля.

Результаты исследования резюмируются ниже в виде таблиц и рисунков. Размерность фазового пространства уравнений, приводимых в таблицах, равна размерности центрального многообразия деформируемого ростка. В первом столбце таблицы указывается класс деформируемых ростков, во втором — его размерность  $\nu$ , в третьем описываются типичные ростки, в четвертом указывается топологическая нормальная форма деформируемого ростка, в пятом — главные деформации. Бифуркационные диаграммы и соответствующие фазовые портреты изображаются на рисунках, номера которых указываются в шестом столбце таблицы. Связь между типичными и главными деформациями для рассмотренных ниже классов такова.

1. В типичных локальных  $\nu$ -параметрических семействах векторных полей встречаются только типичные ростки рассматриваемого класса.

2. Любая  $\nu$ -параметрическая деформация типичного ростка этого класса, трансверсальная классу, эквивалентна надстройке седла<sup>1)</sup> над одной из главных деформаций и является версальной.

3. Типичная  $\nu$ -параметрическая деформация типичного ростка такого класса трансверсальна классу.

Соответствующие простейшим классам типичные ростки, главные семейства, их бифуркационные диаграммы и фазовые портреты описаны в прилагаемой ниже таблице.

---

<sup>1)</sup> Если надстройка седла фактически не производится, то для единообразия будем говорить, что произведена надстройка «тривиального седла» {0}.

Иногда рассматривается класс ростков, эквивариантных относительно некоторой группы симметрий. Тогда все деформации и сопрягающие отображения считаются эквивариантными относительно той же группы.

## § 2. Бифуркации особых точек в типичных однопараметрических семействах

В типичных однопараметрических семействах векторных полей встречаются негиперболические особые точки двух типов: одно собственное значение особой точки равно нулю или два чисто мнимых, отличных от нуля, а остальные не лежат на мнимой оси. В этом параграфе описаны версальные деформации таких ростков и обсуждается явление мягкой и жесткой потери устойчивости положения равновесия.

Отсюда и до конца второй главы, если не оговорено противное, «типичное семейство» — это семейство из некоторого открытого всюду плотного множества в пространстве семейств с  $C^r$ -топологией ( $r$  — любое число, большее или равное степени полиномиальных векторных полей, задающих главные деформации).

### 2.1. Типичные ростки и главные семейства.

**Теорема.** Класс всех ростков векторных полей в негиперболической (имеющей лежащее на мнимой оси собственное число) особой точке представляется в виде объединения двух открытых множеств и остатка коразмерности выше единицы в пространстве всех ростков в особой точке. Первое множество соответствует нулевому собственному значению особой точки, второе — паре чисто мнимых. Типичные ростки в том и другом случае приводятся на центральном многообразии к указанному в таблице 1 виду (строки 1 и 2). Деформации таких ростков в типичных однопараметрических семействах стабильно (с точностью до надстройки седел) эквивалентны выписанным в таблице 1 главным деформациям и версальны.

В таблице 1

$$P_v(x, \varepsilon) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \dots + \varepsilon_v x^{v-1}. \quad (6)$$

**Замечания.** 1. Семейство  $(1^+)$  получается из  $(1^-)$  обращением параметра. Однако при одной и той же надстройке седла первое семейство становится, вообще говоря, неэквивалентным индуцированному из второго.

2. Семейства  $(2^+)$  и  $(2^-)$  получают друг из друга обращением времени:  $t \rightarrow -t$ , симметрией:  $z \rightarrow \bar{z}$  и обращением параметра:  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ ; однако мы исследуем их отдельно, поскольку потеря устойчивости в этих семействах сопровождается принципиально разными явлениями.

2.2. Мягкая и жесткая потеря устойчивости. Рассмотрим семейство  $(2^-)$ . При  $\varepsilon < 0$  особая точка 0 асимптотически устой-

Таблица 1

Класс (описание вырождения)	$\nu$	Типичный росток		Нормализованный росток	Главные семейства	Бифуркационные диаграммы и фазовые портреты
		Нормализованная струя	Требования типичности			
Одно нулевое собственное значение	1	$\dot{x} = ax^2$	$a \neq 0$	$\dot{x} = x^2$	$\dot{x} = x^2 + \varepsilon$ (1+) $\dot{x} = x^2 - \varepsilon$ (1-)	Рис. 3
Пара чисто мнимых собственных значений	1	$\dot{z} = z(i\omega + A\rho)$ $z \in \mathbb{C}, \rho = \overline{z z}$	$\text{Re } A \neq 0$	$\dot{z} = z(i \pm \rho)$	$\dot{z} = z(i + \varepsilon + \rho)$ (2+) $\dot{z} = z(i + \varepsilon - \rho)$ (2-)	Рис. 4
Одно нулевое собственное значение и $\mu$ -кратное вырождение в нелинейных членах: $A_{\mu+1}$	$\mu + 1$	$\dot{x} = ax^{\nu+1}$	$a \neq 0$	$\dot{x} = \pm x^{\nu+1}$	$\dot{x} = \pm x^{\nu+1} + P_{\nu}(x, \varepsilon)$ (3 $\pm$ )	Рис. 5, 6
Пара чисто мнимых собственных значений и $\mu$ -кратное вырождение в нелинейных членах: $B_{\mu+1}$	$\mu + 1$	$\dot{z} = z \left( i\omega + \sum_1^{\nu} A_j \rho^j \right);$ $\text{Re } A_j = 0,$ $j = 1, \dots, \nu - 1$	$\text{Re } A_{\nu} \neq 0$	$\dot{z} = z(i \pm \rho^{\nu})$	$\dot{z} = z(i \pm \rho^{\nu} + P_{\nu}(\rho, \varepsilon))$ (4 $\pm$ )	Рис. 7, 8
Два нулевых собственных значения	2	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$	$ab \neq 0$	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = x_1^2$	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = x_1^2 \pm x_1x_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2x$ (5 $\pm$ )	Рис. 9, 10

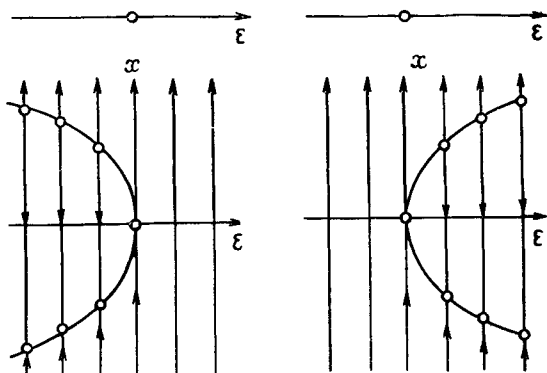


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы и фазовые портреты для главных семейств  $(1^+)$  и  $(1^-)$

чива, как и при  $\epsilon=0$ ; при  $\epsilon>0$  она становится неустойчивой. Однако некоторая окрестность особой точки при малых  $\epsilon>0$  остаётся поглощающей: фазовые кривые с началом на ее границе входят в эту окрестность и навсегда в ней остаются; только теперь они наматываются не на особую точку, а на предельный цикл — окружность радиуса  $\sqrt{\epsilon}$ . Физики говорят, что в этом случае происходит мягкое возникновение автоколебаний или *мягкая потеря устойчивости* (рис. 4б).

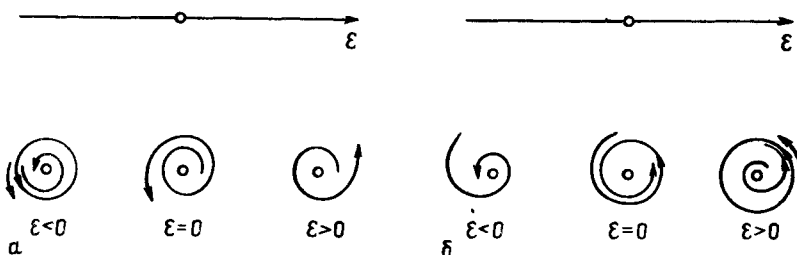


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы и фазовые портреты для главных семейств  $(2^+)$  и  $(2^-)$

Рассмотрим теперь семейство  $(2^+)$ . При  $\epsilon<0$  особая точка 0 устойчива, однако ее бассейн (область ее притяжения) при  $\epsilon \rightarrow 0$  становится малым (радиуса  $\sqrt{-\epsilon}$ ). При  $\epsilon=0$  особая точка 0 неустойчива, как и при  $\epsilon>0$ ; все фазовые кривые, кроме положения равновесия, покидают некоторую окрестность особой точки при всех достаточно малых  $\epsilon \geq 0$ . Эта ситуация называется жестким возбуждением или *жесткой потерей устойчивости*: при прохождении  $\epsilon$  через нуль система скачком переходит на другой режим (стационарный, периодический или более сложный), далекий от изучаемого положения равновесия (рис. 4а).

### § 3. Бифуркации особых точек в многопараметрических семействах общего положения при однократном вырождении линейной части

В этом параграфе рассматривается класс негиперболических ростков векторных полей, имеющих такие же вырождения линейной части, как и в предыдущем параграфе, и, кроме того, дополнительные вырождения в нелинейных членах.

#### 3.1. Главные семейства.

**Теорема.** Ростки с одним нулевым собственным числом (с одной парой чисто мнимых собственных чисел) разбиваются на бесконечное число классов, примыкающих<sup>1)</sup> друг к другу:

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \dots$$

$$B_1 \leftarrow B_2 \leftarrow \dots$$

Класс  $A_\mu(B_\mu)$  имеет коразмерность  $\mu$  в пространстве ростков с особой точкой 0. Он определяется тейлоровским многочленом поля степени  $\mu+1$  ( $2\mu+1$ ) в особой точке: в подходящих координатах уравнение на центральном многообразии должно записываться в виде, указанном в столбце 3 таблицы 1 (строки 3 и 4). Классы  $A_\mu$  и  $B_\mu$  встречаются неустранимым малым шевелением образом в семействах, зависящих от не менее чем  $\mu$  параметров. Типичное семейство, содержащее росток класса  $A_\mu$ , стабильно (с точностью до надстройки седла) локально топологически эквивалентно (указанному в таблице 1) главному семейству и является, как и оно, версальной деформацией своего самого вырожденного поля. Аналогичное утверждение справедливо для семейств, содержащих росток класса  $B_\mu$ , только «эквивалентность» следует заменить «слабой эквивалентностью».▲

Классификация локальных  $\mu$ -параметрических семейств, содержащих ростки класса  $B_\mu$ , с точностью до обычной, а не слабой, эквивалентности, имеет функциональные модули при  $\mu \geq 4$ . Это явление обсуждается ниже в п. 5.11 главы 2. При  $\mu < 4$  «слабую эквивалентность» для деформаций ростков класса  $B_\mu$  можно, по-видимому, заменить обычной; при  $\mu = 1$  это показано (см. п. 2.1 выше).

<sup>1)</sup> Определенне примыкания в [26, стр. 71] расходится с общепринятой терминологией, его следует читать так:

Пусть  $A$  и  $B$  — два непересекающихся класса ростков векторных полей в особой точке 0. Скажем, что класс  $B$  примыкает к классу  $A$  (пишется  $B \rightarrow A$ ), если для каждого ростка  $v$  класса  $B$  существует непрерывная деформация, выводящая этот росток в класс  $A$ . Точнее, существует непрерывное семейство ростков  $\{v_t | t \in [0, 1]\}$  такое, что  $v_0 = v$  и  $v_t$  — росток класса  $A$  при всех  $t \in [0, 1]$

На рис. 15 [26] следует изменить направление стрелок.

**3.2. Бифуркационные диаграммы главных семейств ( $3^\pm$ ).** Множество особых точек полей любого из семейства ( $3^\pm$ ) образует гладкое подмногообразие в произведении фазового пространства на пространство параметров. Бифуркационная диаграмма для главного семейства ( $3^\pm$ ) (множество значений параметра, при которых особые точки семейства сливаются) — это множество коэффициентов многочленов степени  $\mu+1$ , имеющих кратные корни. При  $\mu=1$  это множество — одна точка, при  $\mu=2$  — полукубическая парабола, при  $\mu=3$  — ласточкин хвост (рис. 5). Деформации векторных полей на прямой с вырожденной особой точкой возникают в теории релаксационных колебаний, как «уравнения медленных движений в окрестности точки на складке медленной поверхности» (§ 2, гл. 4). В п. 3.1 указаны только топологические нормальные формы таких деформаций. Для приложений существенны также гладкие нормальные формы; они исследуются в § 5 главы 2 и оказываются очень похожими на главные семейства ( $3^\pm$ ).

При  $\mu=2$  бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов в семействе ( $3^-$ ) показаны на рис. 5, 6.

**3.2. Бифуркационные диаграммы (относительно слабой эквивалентности) и фазовые портреты главных семейств ( $4^\pm$ ).** Исследование бифуркационных диаграмм и перестроек фазовых портретов в главных семействах ( $4^\pm$ ) сводится к аналогичной задаче для семейств факторсистем относительно переменной:

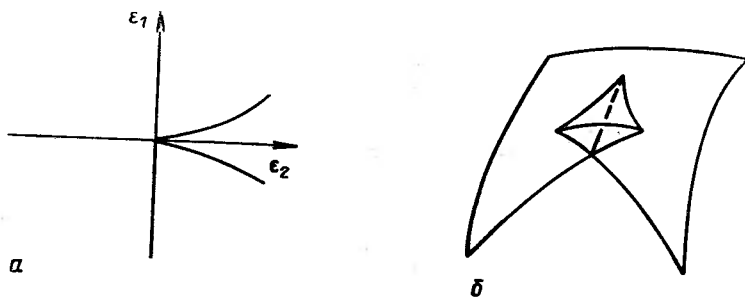


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы главных семейств ( $3^-$ ) при  $\nu=2$  и  $\nu=3$ : а. Полукубическая парабола, б. Ласточкин хвост.

$\rho = z\bar{z}$ . Эти семейства имеют вид

$$\rho = 2\rho (\pm \rho^\mu + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_\mu \rho^{\mu-1}), \quad (7^\pm)$$

$$\rho \geq 0.$$

Особой точке  $\rho_0 > 0$  такого уравнения соответствует предельный цикл уравнения ( $4^\pm$ ) — окружность  $|z|^2 = \rho_0$ . Характер устойчивости соответствующих друг другу точки и цикла одинаков; для цикла речь идет, конечно, об орбитальной устойчи-



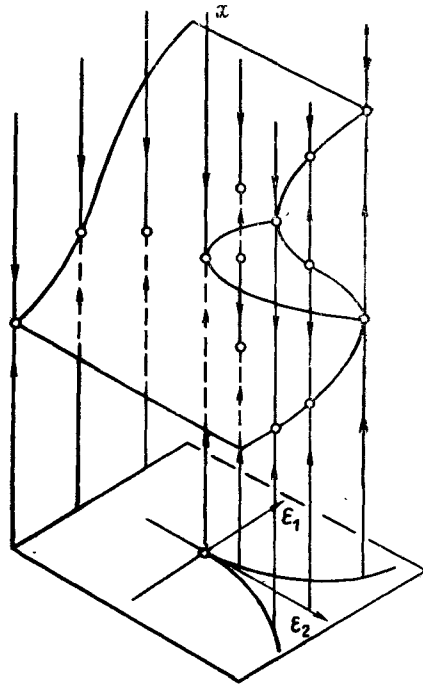


Рис. 6. Фазовые портреты уравнений семейства (3-) при  $\nu=2$

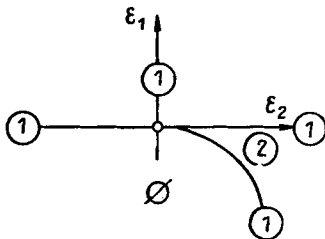


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма главного семейства (4-) при  $\nu=2$ . Каждой неточечной компоненте бифуркационной диаграммы на рисунке сопоставлено число — количество циклов в уравнении главного семейства, соответствующем набору параметров из этой компоненты

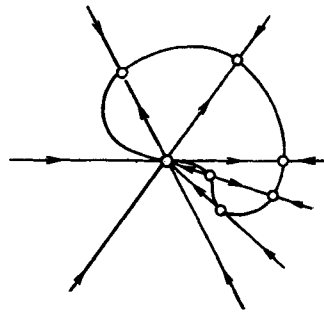


Рис. 8. Фазовые портреты факторсистем для подсемейства вида (4-), соответствующего окружности с центром 0 на плоскости параметров

вости. Точки бифуркационной диаграммы семейства соответствуют кратным циклам или, что то же самое, кратным особым точкам соответствующей факторсистемы (фазовое

пространство которой — положительная полуось). Тем самым, бифуркационная диаграмма семейства  $(4^+)$  — это множество многочленов, имеющих неотрицательные кратные корни или нулевой корень. Например, при  $\mu=2$  это — половина полукубической параболы и прямая  $\varepsilon_1=0$  (рис. 7).

#### § 4. Бифуркации особых точек векторных полей с двукратным вырождением линейной части

Не все бифуркации, описанные в этом параграфе, исследованы до конца.

**4.1. Список вырождений.** В типичных двупараметрических семействах общего положения встречаются ростки векторных полей в особой точке, имеющие двукратные вырождения линейной части только одного из следующих трех типов:

1. Два собственных значения равны нулю; центральное многообразие двумерно; соответствующий блок линейной части — нильпотентная жорданова клетка.

2. Одно нулевое и пара чисто мнимых собственных значений; центральное многообразие трехмерно.

3. Две пары чисто мнимых собственных значений; центральное многообразие четырехмерно.

Полное описание бифуркаций получено только для первого из этих классов. Для ростков двух других классов аналогичное описание, по-видимому, невозможно. Теория нормальных форм дает в качестве упрощенной модели для исследования деформаций ростков этих классов вспомогательные локальные семейства эквивариантных векторных полей на плоскости. Переход от вспомогательных семейств к исходным также небезобиден. Исследование вспомогательных семейств — трудная задача из-за бифуркаций предельных циклов.

#### 4.2. Два нулевых собственных значения.

**Теорема ([43]).** В типичных двупараметрических семействах векторных полей встречаются лишь такие ростки с двумя нулевыми собственными значениями в особой точке, ограничение которых на центральное многообразие в подходящих координатах имеет вид, указанный в таблице 1 (строка 5). Деформации таких ростков в типичных двупараметрических семействах стабильно (с точностью до надстройки седел) эквивалентны выписанным в таблице главным деформациям и версальны.

Опишем бифуркации в главном семействе  $(5^+)$ . Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость  $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  на четыре части, обозначенных  $A, B, C, D=D_1 \cup D_2 \cup D_3$  на рис. 10. Фазовые портреты, соответствующие каждой из четырех частей плоскости  $\varepsilon$ , показаны на рис. 10. Ветви бифуркационной диаграммы со-

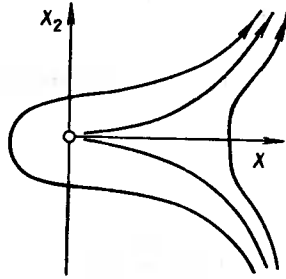


Рис. 9. Фазовый портрет векторного поля на плоскости с нильпотентной линейной частью и нелинейностью общего положения

ответствуют системам с вырождениями коразмерности 1, изображенным также на рис. 10 ( $P, Q, R, S$ ).

Бифуркации в главном семействе (5) получаются из описанных изменением знаков  $t$  и  $x_2$ .

**4.3. Редукции к двумерным системам.** Бифуркации особых точек с одним нулевым и парой чисто мнимых собственных значений, а также с двумя чисто мнимыми парами достаточно изучать в трехмерном и четырехмерном пространствах соответственно (по теореме сведения). Метод Пуанкаре приводит в этом случае к вспомогательной задаче. Семейство уравнений  $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$  превращается в систему

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon), \quad \dot{\varepsilon} = 0.$$

Эта система приводится к нормальной форме Пуанкаре—Дюлака формальной заменой, сохраняющей  $\varepsilon$ . Затем отбрасываются члены достаточно высокого порядка по  $x$  (выше трех для нуля с мнимой парой и выше пяти для двух мнимых пар). Полученное полиномиальное векторное поле инвариантно относительно группы вращений, изоморфной тору, размерность которого равна числу мнимых пар. Соответствующая факторсистема представляет собой семейство уравнений на плоскости, инвариантное относительно некоторой конечной группы движений плоскости. В классе таких семейств изучается версальная деформация факторсистемы, соответствующей росту  $v(\cdot, \varepsilon)$ . Положения равновесия и инвариантные кривые факторсистем интерпретируются как приближения к инвариантным торах и гиперповерхностям уравнений исходного семейства.

Как указывалось выше, отбрасывание старших членов в этой процедуре небезопасно. Для систем исходного семейства существование инвариантных торов, соответствующих положениям равновесия вспомогательных факторсистем, выводится из теоремы Крылова—Боголюбова (Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Мит-

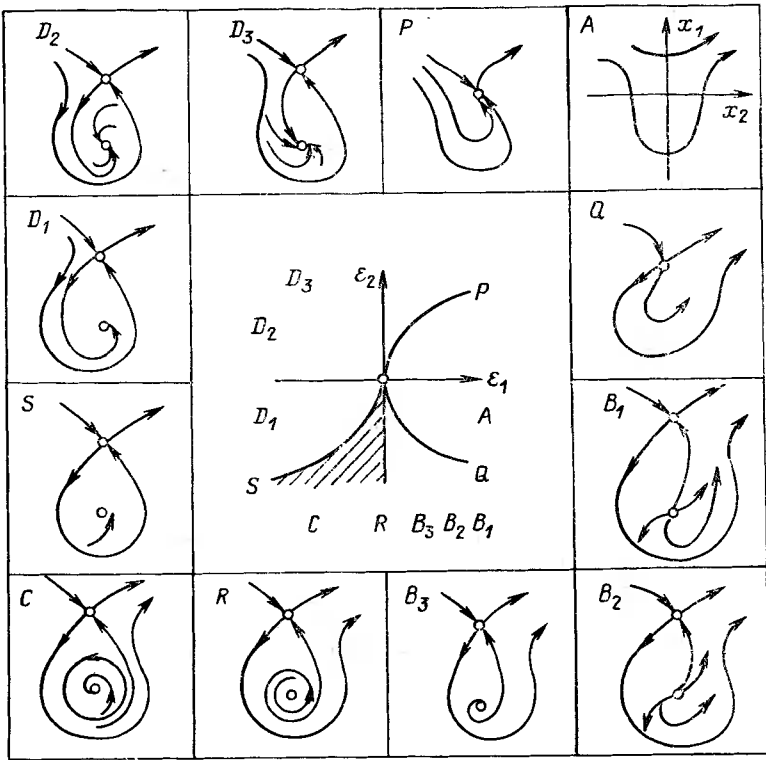


Рис. 10. Бифуркации векторных полей с нильпотентной линейной частью на плоскости

ропольский, [26 : 17]). Однако гладкие торы, соответствующие циклам исходных систем, по-видимому, существуют при значениях параметров, близких к линии рождения циклов, но могут разрушаться раньше, чем исчезнут соответствующие циклы. По этому поводу см. [157] и цитированную там литературу.

**4.4. Нулевое и пара чисто мнимых собственных значений** (по Жолондеку [72]). Описанная выше процедура превращает деформацию роста векторного поля с одним нулевым и парой чисто мнимых собственных значений линейной части в особую точку в семейство уравнений, инвариантное относительно группы  $S_2$  движений плоскости  $(x, r)$ , порожденной симметрией  $(x, r) \mapsto (x, -r)$ . Ростку с нулевым и парой чисто мнимых собственных значений соответствует  $S_2$ -эквивариантный росток с нулевой линейной частью на плоскости.

**Теорема.** В типичных двухпараметрических семействах  $S_2$ -эквивариантных векторных полей на плоскости встречаются

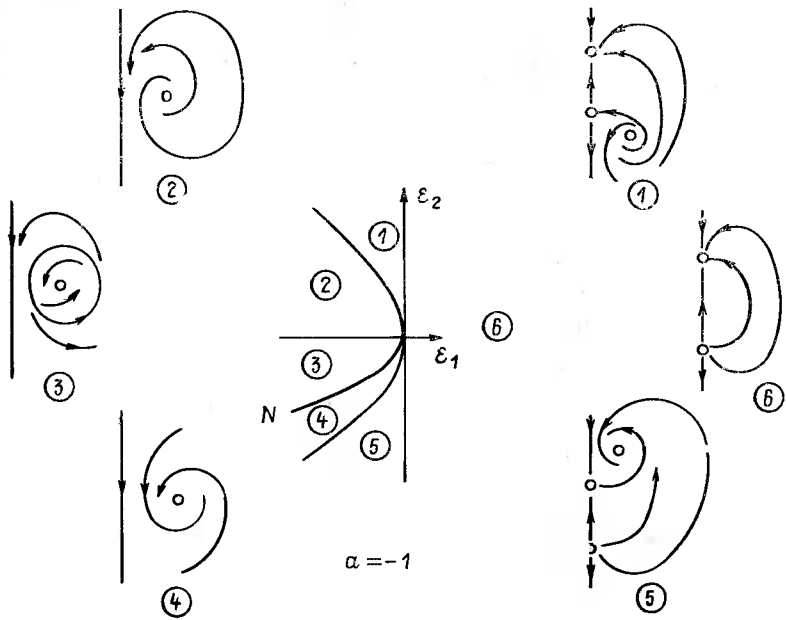
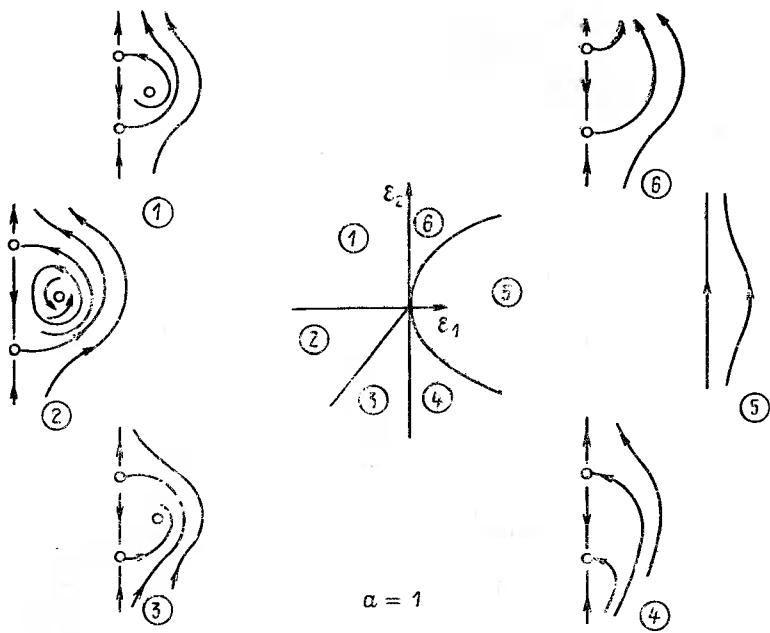


Рис. 11. Бифуркации  $S_2$ -эквивариантных векторных полей (циклы рождаются)

лишь такие ростки с нулевой линейной частью в особой точке, 3-струя которых имеет вид, указанный в таблице 2 (многоточием обозначены несущественные члены). Деформации таких ростков в типичных двухпараметрических  $S_2$ -эквивариантных семействах эквивалентны главным деформациям и версальны.

Таблица 2

Класс	$\nu$	Типичный росток		Главные $S_2$ -эквивариантные семейства	Бифуркационные диаграммы и фазовые портреты
		Нормализованная струя	Требования типичности		
$S_2$ -эквивариантные векторные поля на плоскости ( $S_2$ -симметрия $(x, r) \mapsto (x, -r)$ )	2	$\dot{x} = ax^2 + br^2 + cx^3 + \dots$ $\dot{r} = 2dxr + \dots$	$\begin{cases} abd \neq 0 \\ c \neq 0 \text{ при} \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + ax^2 + r^2 + x^3 \\ \dot{r} = -2xr \\ a = \pm 1 \end{cases} \quad (8)$	Рис. 11, 12
				$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + ax^2 - r^2 \\ \dot{x} = -2xr \\ a \in \{-3; -1; 1\} \end{cases} \quad (9)$	Рис. 13, 14

З а м е ч а н и я. 1. Топологическое различие главных семейств (9) при  $a = -1$  и  $a = -3$  наблюдается только при нулевом значении параметра: см., с одной стороны, рис. 13 и, с другой стороны, рисунки 14 б, 14 в, отличающиеся структурой множества 0-кривых.

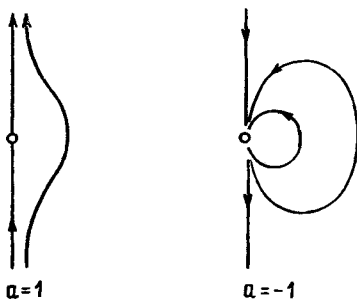


Рис. 12. Локальные фазовые портреты главных  $S_2$ -эквивариантных векторных полей, соответствующих нулевому значению параметра, при бифуркации которых рождаются циклы

2. Уравнения семейства (9) в достаточно малой окрестности нуля (по  $x$ ,  $z$  и  $\varepsilon$ ) не имеют предельных циклов, уравнения семейства (8) — не более одного цикла.

3. В исследовании семейства (8) при  $a = -1$  существенно.

указание формы окрестности:

$$(x, r) \in U_\delta = \left\{ \frac{1}{2} x^2 + r^2 < \delta^2, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \frac{1}{2} \delta^2; \right.$$

предыдущая теорема для этого случая справедлива при любом достаточном малом  $\delta$ . Форма окрестности существенна потому, что в рассматриваемом семействе происходит специфическая бифуркация: выход предельного цикла на границу области  $U_\delta$  при сколь угодно малых значениях параметров. Эта бифуркация происходит на кривой  $N$  (рис. 11 для  $a = -1$ ).

4. Подчеркнем еще раз, что в типичных двупараметрических семействах, состоящих из  $S_2$ -эквивариантных векторных полей, встречаются только такие ростки, представители которых в некоторой окрестности нуля, общей для всех ростков семейства, имеют не более одного предельного цикла. Эта часть теоремы Жолондека — наиболее содержательный и трудно доказываемый факт (Гукенхеймер и Холмс [158, стр. 352] ошибочно утверждают, что бывает два цикла.) Аналогичные результаты (но без доказательства теоремы о числе циклов) были получены Н. К. Гавриловым [59].

4.5. **Две чисто мнимых пары.** Рассмотрим векторное поле с двумя парами чисто мнимых собственных значений в особой точке 0 пространства  $\mathbb{R}^4$ . Редукции п. 3.4 приводят к следующей задаче: изучить бифуркации фазовых портретов в типичных двупараметрических семействах в четверти плоскости  $x \geq 0, y \geq 0$  (поле касается осей координат):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xA(x, y), \\ \dot{y} &= yB(x, y). \end{aligned} \tag{10}$$

Системы (10) встречаются также в экологии (модели типа Лотка—Вольтерра), где ограничение  $x \geq 0, y \geq 0$  вызвано реальным смыслом фазовых переменных (величины популяций хищника и жертвы).

**Комментарий.** Двумерная система (10) получается из четырехмерной системы с двумя мнимыми парами собственных чисел следующим образом:  $x$  означает квадрат модуля первой, а  $y$  — второй (комплексной) координаты после приведения системы к нормальной форме Пуанкаре—Дюлака. В предположении несоизмеримости частот (отношение различных по модулю чисто мнимых собственных значений иррационально) резонансные члены выражаются через  $x$  и  $y$ ; поэтому нормальная форма факторизуется до указанной двумерной системы.

Возникающая задача о векторных полях в четверти плоскости формально эквивалентна задаче о векторных полях на плоскости, переходящих в себя при отражении плоскости в каждой из осей. Действительно, обозначая через  $x$  и  $y$  квадраты координат, мы приведем соответствующее полю уравнение к виду (10).

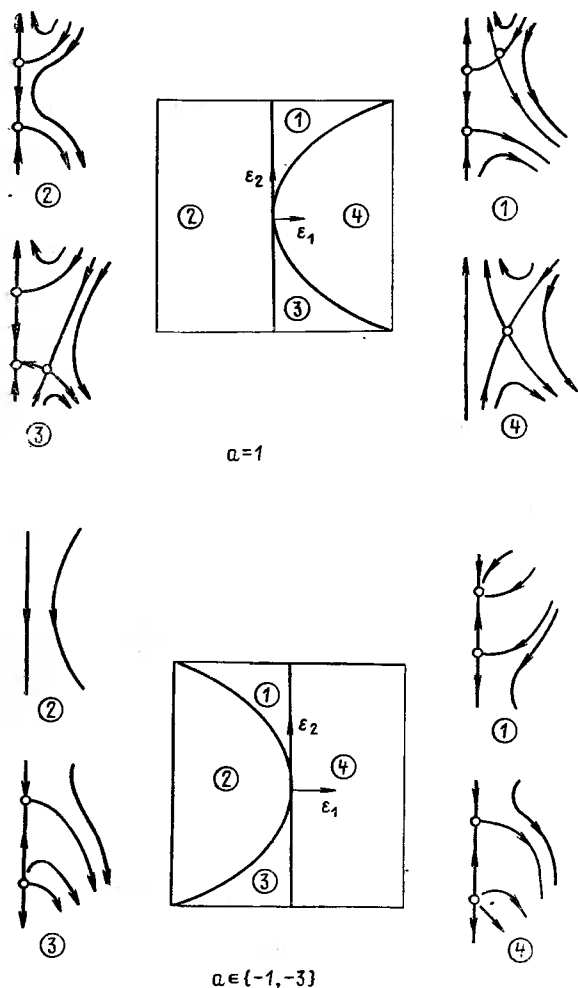


Рис. 13. Бифуркации  $S_2$ -эквивариантных векторных полей (циклы не рождаются)

Бифуркации в типичных двухпараметрических семействах (10) изучены лишь недавно (Жолондек, 1985)<sup>1)</sup>. Получены следующие результаты. В типичном двухпараметрическом семействе систем (10) функции  $A$  и  $B$  одновременно обращаются в 0 в нуле лишь при отдельных значениях параметров. Рассмотрим такое значение параметров, скажем, нулевое, и запишем систему в виде

<sup>1)</sup> Частные результаты получены в работах [19], [60], [105], [157], [158] и В. И. Швецовым в дипломной работе, МГУ, 1983, 15 с.



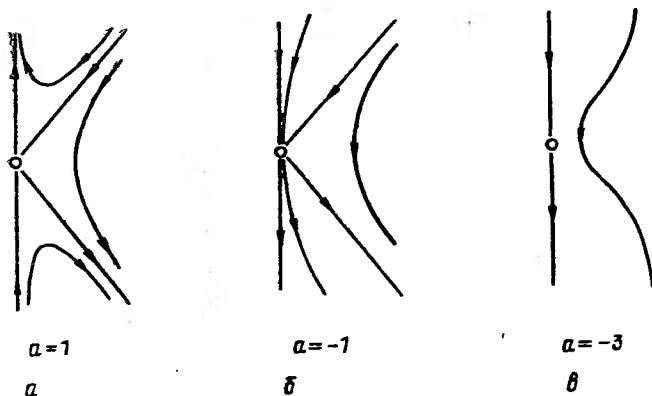


Рис. 14. Локальные фазовые портреты главных  $S_2$ -эквивариантных векторных полей, соответствующих нулевому значению параметров, при бифуркации которых не рождается циклов

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(ax + by + \dots), \\ \dot{y} &= y(cx + dy + \dots).\end{aligned}$$

Для типичных систем такого вида  $ad \neq 0$ . Растяжением осей и изменением, если нужно, знака времени, можно добиться равенств  $a=1$ ,  $|d|=1$ . Знак  $d$  играет существенную роль; рассмотрим системы

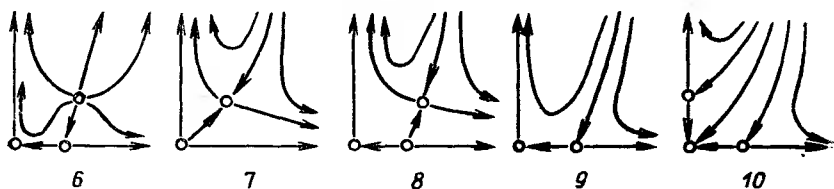
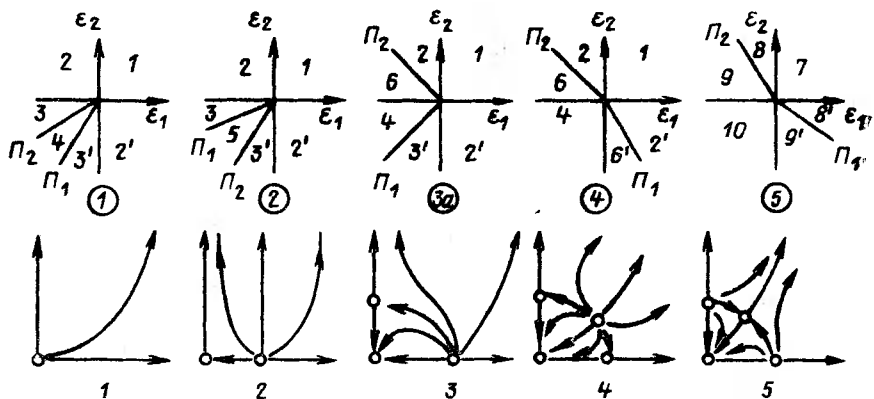
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x \pm by + \dots), \\ \dot{y} &= y(cx \pm y + \dots).\end{aligned} \tag{11^\pm}$$

Заменой  $(x, y) \rightarrow (y, x)$  можно добиться того, что в системе  $(11^+)$  будет  $b \geq c$ ; того же неравенства в системе  $(11^-)$  можно добиться той же заменой и обращением времени.

Положим:  $\Delta = bc - 1$ . Системы  $(11^+)$ , для которых  $bc\Delta = 0$ , и системы  $(11^-)$ , для которых  $b(b-1)c(c-1) = 0$ , — исключительные; они не встречаются в типичных двухпараметрических семействах уравнений вида (10). Неисключительные системы  $(11^+)$  и те неисключительные системы  $(11^-)$ , для которых  $\Delta < 0$ , называются системами легкого типа; остальные неисключительные системы  $(11^-)$  — трудного типа.

**Теорема.** В типичном двухпараметрическом семействе систем Лотка—Вольтерра (10) встречаются лишь такие деформации систем легкого типа, которые топологически эквивалентны одному из главных локальных семейств

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\varepsilon_1 + x \pm by), \\ \dot{y} &= y(\varepsilon_2 + cx \pm y)\end{aligned} \tag{12^\pm}$$



a

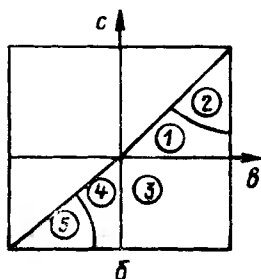


Рис. 15а. Бифуркационные диаграммы и фазовые портреты для легких главных семейств (12) при  $d > 0$ . б. Разбиение полушлости параметров  $(b, c)$ ,  $b \geq c$

с двумя параметрами  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (топологическая эквивалентность сохраняет первый квадрант; допускаются обращения времени). Эти деформации, как и их нормальные формы (12<sup>±</sup>), топологически версальны. Два семейства (12<sup>±</sup>), соответствующие наборам  $(b, c)$  из одной «легкой» связной компоненты множества неисключительных значений, топологически эквивалентны. Главные деформации уравнений легкого типа не имеют циклов

в некоторой окрестности нуля, не зависящей от параметров. Бифуркационные диаграммы и перестройки в таких семействах изображены на рис. 15 а, 16 а. ▲

На каждом из рисунков 15, 16 изображены бифуркационные диаграммы, под ними — фазовые портреты; внизу — разбиение полуплоскости параметров  $(b, c)$ ,  $b \geq c$ , на классы топологической эквивалентности «легких» семейств  $(12^{\pm})$ . Области, соответствующие трудным семействам, заштрихованы. Номер открытой области на бифуркационной диаграмме — это номер соответствующего фазового портрета из нижней части;  $2', 3' \dots$  обозначают фазовые портреты, получаемые из  $2, 3, \dots$  симметрией  $(x, y) \rightarrow (y, x)$ . При переходе через оси  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  без нуля на положительных полуосях  $x$  и  $y$  рождаются из нуля особые точки или происходит обратный процесс; при переходе через луч  $\Pi_1(\Pi_2)$  от особой точки на оси  $y$  (на оси  $x$ ) отделяется или в ней исчезает особая точка, расположенная строго внутри первого квадранта. Легкие семейства  $(12^-)$  типа  $2$  и  $2a$ , а также типа  $3$  и  $3a$  отличаются друг от друга только при нулевом значении параметра; множества 0-кривых соответствующих вырожденных систем неэквивалентны (рис. 16,  $g, d$ ).

Для каждого неисключительного набора  $(b, c)$ , принадлежащего одной из трудных компонент, существуют сколь угодно малые значения параметра, при которых уравнение  $(12^-)$  имеет первый интеграл и целое семейство циклов. Такие уравнения не могут встречаться в типичных конечно параметрических семействах.

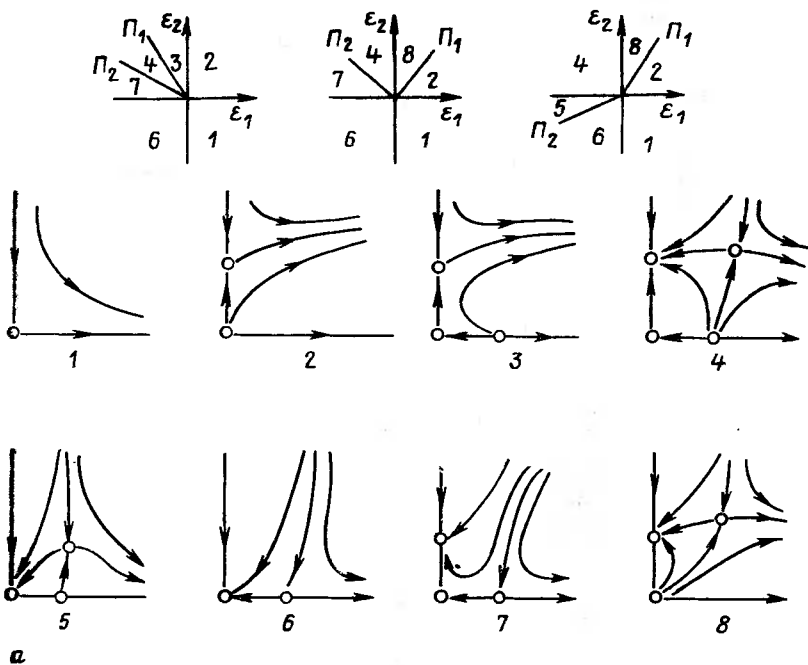
**4.6. Главные деформации уравнений трудного типа в задаче о двух мнимых парах (по Жолондеку).**

Теорема. Росток в нуле типичного 2-параметрического семейства «трудного типа» приводится к нормальной форме — «трудному главному семейству»

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\epsilon_1 + x - by), \\ \dot{y} &= y(\epsilon_2 + cx - y \pm f_2(x, y, \epsilon_1)). \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения «трудного главного семейства» имеют не более одного цикла в некоторой окрестности нуля, общей для всех уравнений семейства. Здесь  $f_2$  — однородный многочлен второй степени от трех переменных с коэффициентами, зависящими от  $b$  и  $c$ ; точный вид его указан ниже. ▲

Остановимся подробнее на построении и исследовании трудных главных семейств. Замена переменных и умножение на положительную функцию не меняют топологии фазового портрета. Поэтому в семействе (13) оставлены кубические члены, «дополнительные» к тем, которые можно уничтожить заменами переменных и времени в системе (11) (Тем же способом построено главное  $S_2$ -эквивариантное семейство в п. 4.4.) В каж-



*a*

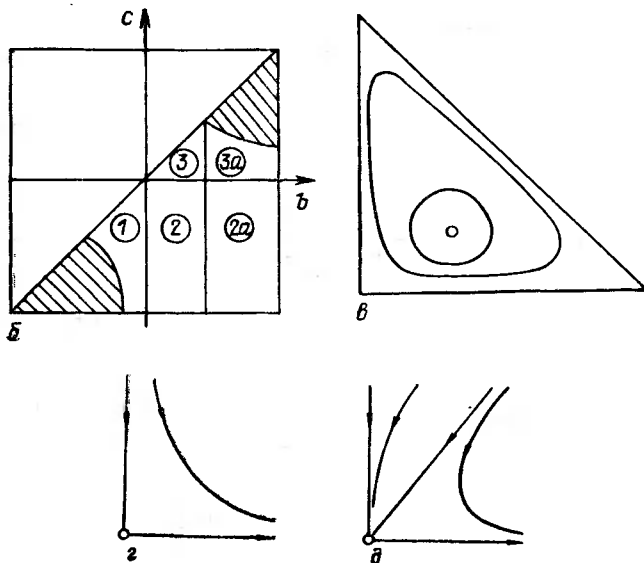


Рис. 16. *a*. Бифуркационные диаграммы и фазовые портреты для легких главных семейств (12) при  $d < 0$ . *б*. Разбиение полуплоскости параметров  $(b, c)$ ,  $b \geq c$ . *в*. Линии уровня гамильтониана  $H$ , соответствующие одному из уравнений семейства (12-) при  $b < 0$ ,  $c < 0$ . *г, д*. Фазовые портреты уравнений легких главных семейств, соответствующих нулевому значению параметра: *г* для областей 2, 3; *д* — для областей 2а, 3а

дом из «трудных» неисключительных семейств (13) при переходе параметра через некоторую линию с концом в нуле на плоскости  $\epsilon$  происходит смена устойчивости особой точки с переходом пары собственных значений через мнимую ось и рождением цикла. Два семейства (13), отличающиеся лишь знаком перед  $f_2$ , топологически неэквивалентны: в одном из них потеря устойчивости мягкая, а в другом — жесткая (см. § 2).

Область пространства  $(x, y, \epsilon)$ , в которой существуют предельные циклы «главного локального семейства» (13), подходит к нулю узким языком. Замена времени, координат и параметров превращает «трудное главное семейство», рассматриваемое в этой области, в малое возмущение интегрируемого уравнения. Выпишем эту замену и это возмущение при  $b < 0, c < 0, \Delta > 0$ . В этом случае интересующий нас язык на плоскости параметров расположен в полуплоскости  $\epsilon_1 < 0$ .

Если  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{c-1}{b-1} = 0$ , то система (12') имеет первый интеграл (он выписан ниже, после изменения масштаба). Сделаем замену в пространстве параметров так, что один параметр будет измерять отличие возмущения от нуля, а произведение первого на второй — отклонение системы от интегрируемой

$$\epsilon_1 = -\delta, \quad \epsilon_2 = \delta \frac{c-1}{b-1} + \delta\mu, \quad \delta > 0.$$

После этого замена масштаба переменных и времени

$$x = \delta u, \quad y = \delta v, \quad \tau = \delta t$$

переводит семейство (13) в семейство

$$\begin{aligned} u' &= u(-1 + u - bv), \\ v' &= v \left( \frac{c-1}{b-1} + cu - v + \mu + \delta f_2(u, v, -1) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

При  $(\delta, \mu) = 0$  система интегрируется; ее первый интеграл  $H$  и интегрирующий множитель  $m$  соответственно равны

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\beta} u^\alpha v^\beta \left( -1 + u + \frac{1-b}{1-c} v \right), \\ m &= u^{\alpha-1} v^{\beta-1}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{1-c}{\Delta}, \quad \beta = \frac{1-b}{\Delta}.$$

В случае  $\Delta > 0, \alpha < 0, \beta > 0$  и замкнутые линии уровня гамильтониана  $H$  заполняют треугольник (рис. 16в). Соответствующую область значений  $H$  обозначим через  $\sigma$ . Фазовые кривые системы (14) — это интегральные кривые уравнения

$$dH + \mu\omega_1 + \delta\omega_2 = 0,$$

где  $\omega_1 = u^{\alpha-1} v^\beta du$ ,  $\omega_2 = u^{\alpha-1} v^\beta f_2(u, v, -1) du$ . Предельные циклы возмущенного уравнения рождаются из замкнутой фазовой кривой  $\gamma_h: H = h$  невозмущенного уравнения, если интеграл

$$I(c) = \int_{H < c} d\omega, \quad \omega = \mu\omega_1 + \delta\omega_2,$$

имеет при  $h = c$  простой нуль. Положим:

$$f_2(x, y, \varepsilon_1) = \frac{(x + \varepsilon_1)^2}{\beta} - 2 \frac{(x + \varepsilon_1) by}{\beta + 1} + \frac{b^2 y^2}{\beta + 2};$$

$$I_1(c) = \int_{H < c} d\omega_1, \quad I_2(c) = \int_{H < c} d\omega_2.$$

Получим

$$I_1(c) = -\beta \int_{H < c} u^{\alpha-1} v^{\beta-1} du \wedge dv,$$

$$I_2(c) = - \int_{H < c} u^{\alpha-1} v^{\beta-1} z^2 du \wedge dv, \quad z = -1 + u - bv.$$

Функции  $I_1$  и  $I_2$  линейно независимы на отрезке  $\sigma$ ; поэтому при подходящих  $(\delta, \mu)$  интеграл  $I$  имеет, по крайней мере, один простой нуль на этом отрезке. Вообще, если  $k$  функций на отрезке линейно независимы, то существует их линейная комбинация, имеющая, по крайней мере,  $k-1$  простой нуль.

**Теорема.** Интеграл  $I$  имеет не более одного нуля на отрезке  $\sigma$ .

Трудные семейства (13) при  $b > 0$ ,  $c > 0$  исследуются аналогично.

**Замечание.** Если вместо кубических членов  $\pm y f_2$  в системе (13) дописать произвольные кубические члены, не выводящие систему из класса (10):  $x F_2(x, y)$ ,  $y G_2(x, y)$ , где  $F_2$  и  $G_2$  — однородные многочлены второй степени, то предыдущее построение приведет к семейству уравнений вида  $dH + \tilde{\omega} = 0$ ,

$$\tilde{\omega} = \mu \omega_1 + \delta \tilde{\omega}_2, \quad \tilde{\omega}_2 = m (v G_2 du - u F_2 dv), \quad m = u^{\alpha-1} v^{\beta-1}. \quad (15)$$

Форма  $\tilde{\omega}$  является линейной комбинацией семи форм:  $m v du$ ,  $m v^3 du$ ,  $m v^2 u du$ ,  $m v u^2 du$ ,  $m v^2 u dv$ ,  $m v u^2 dv$ ,  $m u^3 dv$ . Дифференциалы этих форм порождают четырехмерное пространство. Поэтому пространство интегралов от линейных комбинаций этих форм по любому семейству замкнутых кривых не более чем четырехмерно. Однако оно не четырехмерно, а двумерно для рассматриваемого семейства кривых  $\{H = h\}$  (и потому нельзя заключить, что существует форма  $\tilde{\omega}$  вида (15), интеграл которой имеет три нуля на  $\sigma$ , как утверждается в [158, стр. 409]).

## § 5. Показатели мягкой и жесткой потери устойчивости

Определяемые в этом параграфе показатели описывают скорость, с которой происходит потеря устойчивости в типичных  $\nu$ -параметрических семействах векторных полей при  $\nu \leq 3$ .

**5.1. Определения.** Пространство ростков вещественных векторных полей в особой точке разделяется на три части: область устойчивости, область неустойчивости и граница области устойчивости. Эта граница состоит из таких ростков, оператор линеаризации которых не имеет собственных значений строго в правой полуплоскости, но имеет хотя бы одно собственное значение на ее границе.

**Определение 1.** Росток  $v$  векторного поля в особой точке 0, принадлежащий границе области устойчивости, *мягко* теряет устойчивость при деформации  $V = \{v_\varepsilon | \varepsilon \in B \subset \mathbb{R}^k, 0 \in B, v_0 = v\}$ , если существует такая окрестность  $U$  особой точки 0 и такое семейство окрестностей  $\{U_\varepsilon | \varepsilon \in B \setminus \{0\}\}$ , стягивающееся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что

1. Окрестность  $U$  — поглощающая для всех полей  $v_\varepsilon$ : каждая положительная полутраектория поля  $v_\varepsilon$  с началом в  $U$  целиком принадлежит  $U$ .

2. При  $\varepsilon \neq 0$  все положительные полутраектории поля  $v_\varepsilon$  с началом в  $U$  попадают в  $U_\varepsilon$  и там остаются.

**Определение 2.** Росток  $v$  векторного поля в особой точке 0, принадлежащей границе области устойчивости, *жестко* теряет устойчивость при деформации  $V = \{v_\varepsilon | \varepsilon \in B \subset \mathbb{R}^k, 0 \in B, v_0 = v\}$ , если существуют такая окрестность  $U$  особой точки 0 и определенное для всех достаточно малых  $\varepsilon \neq 0$  семейство начальных условий  $x_\varepsilon$ ,  $|x_\varepsilon| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , такое что положительная полутраектория поля  $v_\varepsilon$  с начальным условием  $x_\varepsilon$  покидает окрестность  $U$ .

**Определение 3.** Число  $\kappa$  называется *показателем* мягкой (жесткой) потери устойчивости ростком  $v$ , если для любой деформации этого ростка существует такое  $C$  (зависящее от деформации и от метрики в фазовом пространстве и пространстве параметров), что окрестности  $U_\varepsilon$  из определения 1 (начальные условия  $x_\varepsilon$  из определения 2) принадлежат шару  $|x| < C|\varepsilon|^\kappa$ . Верхняя грань таких  $\kappa$  называется *максимальным* показателем мягкой (жесткой) потери устойчивости ростком.

**З а м е ч а н и я.** 1. Максимальный показатель не зависит ни от деформации, ни от метрики.

2. Асимптотически устойчивый росток всегда мягко теряет устойчивость [83].

3. Чем больше показатель мягкой потери устойчивости, тем медленнее с ростом  $\varepsilon$  растут размеры аттрактора, заменившего особую точку, тем мягче теряется устойчивость.

Чем больше показатель жесткой потери устойчивости, тем быстрее с убыванием  $\varepsilon$  приближается к положению равновесия «опасная зона» начальных условий, из которых решение выбрасывается за пределы фиксированной окрестности, тем жестче теряется устойчивость.

4. «Опасная зона» начальных условий при жесткой потере устойчивости может быть очень узкой; ее бывает нелегко обнаружить при вычислениях. В этом — существенная разница между уравнениями, лежащими вблизи границы устойчивости, и уравнениями, неустойчивыми по линейному приближению, с большим инкрементом (максимальной вещественной частью собственного числа).

Пример. Бифуркация рождения цикла в однопараметрическом семействе общего положения сопровождается мягкой или жесткой потерей устойчивости с показателем  $1/2$  (см. п.п. 2.2, 2.3).

На формальном языке максимальные показатели  $\kappa_+$  и  $\kappa_-$  определяются следующим образом. Пусть  $v(x, \varepsilon)$  — деформация ростка  $v(x, 0)$  с особой точкой  $0$ ,  $\varphi_{x, \varepsilon}$  — траектория поля  $v(\cdot, \varepsilon)$  с началом  $x: \varphi_{x, \varepsilon}(0) = x$ . Если росток  $v(\cdot, \varepsilon)$  устойчив, то существует поглощающая окрестность  $U$  положения равновесия. Если росток  $v(\cdot, \varepsilon)$  неустойчив, то существует такая окрестность  $U$  положения равновесия, для которой найдется положительная полутраектория со сколь угодно малым начальным условием,

покидающая  $U$ . В этих обозначениях

$$\kappa_+ = \overline{\lim}_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \sup_{\substack{x \in \partial U \\ t \in [0, \infty)}} \frac{\ln |\varphi_{x, \varepsilon}(t)|}{\ln \varepsilon}.$$

Пусть  $E(x, \varepsilon)$  — полуинтервал оси  $\mathbb{R}^+$ , являющийся «максимальной областью определения отрицательной полутраектории  $\varphi_{x, \varepsilon}$  со значениями в  $U$ »

$$E(x, \varepsilon) = \{t \leq 0 \mid \varphi_{x, \varepsilon}(\tau) \in U \text{ при } t \leq \tau \leq 0\}.$$

Тогда

$$\kappa_- = \overline{\lim}_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \sup_{\substack{x \in \partial U \\ t \in E(x, \varepsilon)}} \frac{\ln |\varphi_{x, \varepsilon}(t)|}{\ln \varepsilon}.$$

## 5.2. Таблица показателей.

Теорема. В типичных трехпараметрических семействах встречаются только такие ростки векторных полей в особой точке, лежащие на границе области устойчивости, которые принадлежат одному из классов, перечисленных в таблице 3. Если росток устойчив, он мягко теряет устойчивость, если не-



Таблица 3

$\nu$	Класс	$\kappa_+$	$\kappa_-$	Класс	$\kappa_+$	$\kappa_-$
1	$W_1^{0;*}$	—	$\frac{1}{2}$	$W_2^{I;*}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$W_1^{0;0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$W_2^{I;0}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$W_2^{J;*}$	—	$\frac{3}{4}$	$W_3^{0,I;*}$	—	$\frac{1}{2}$
	$W_4^{I,I;*}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$W_1^{0;0,0}$	—	$\frac{1}{4}$
3	$W_2^{J;0}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}; \frac{1}{4}$	$W_3^J$	—	$\frac{5}{6}$
	$W_4^{I,J}$	—	$> \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)$	$W_3^{0,I;0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}; > \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)$
	$A_1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$A_2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}; > \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \right)$
	$A_3$	—	1	$A_4$	—	1
	$A_5$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$W_5^{0,I,I}$	—	$\frac{1}{2}$
	$W_6^{I,I,I}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$W_2^{I;0,0}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Классы  $A_1, \dots, A_5$  определены в [26, § 5, гл. 3].

устойчив — жестко; соответствующие максимальные показатели тоже приведены в таблице.

В таблице 3  $\nu$  — коразмерность вырождения,  $\kappa_+$  — максимальный показатель мягкой,  $\kappa_-$  — жесткой потери устойчивости. Прочерк означает, что в рассматриваемом классе нет устойчивых ростков (встречаемых в трехпараметрических семействах общего положения). Перечисленные в таблице 3 классы определены в [26, § 5, гл. 3]. Напомним расшифровку некоторых обозначений. Нижний индекс в обозначении класса  $W \dots$  указывает размерность центрального многообразия; верхние символы до точки с запятой обозначают вырождения линейной части: 0 — нулевое собственное значение,  $I$  — пара чисто мнимых,  $J$  — нильпотентная жорданова клетка, порядок которой устанавливается по размерности центрального многообразия. Знак \* после точки с запятой символизирует отсутствие вырождений в нелинейных членах; число нулей после точки с запятой равно числу вырождений в нелинейных членах.

Комментарий. 1. В скобках указаны гипотетические значения максимальных показателей.

2. Максимальные показатели мягкой и жесткой потери устойчивости не обязаны совпадать для всех ростков одного класса (встречаемых в общего положения 3-параметрических семействах). Такое несовпадение имеется в классах  $W_2^{7,3}$  и, возможно,  $W_3^{0,1,0}$ .

3. Жирные линии в таблице разделяют классы разной размерности.

Опасные и безопасные зоны границы области устойчивости (при переходе через которые происходит соответственно жесткая и мягкая потеря устойчивости) впервые исследованы Н. Н. Баутиным [35].

Настоящий параграф излагает результаты Л. Г. Хазина и Э. Э. Шноля [103].

## Глава 2

### БИФУРКАЦИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Бифуркации фазовых портретов в окрестности цикла полностью описываются бифуркациями соответствующего преобразования монодромии. Поэтому основным объектом изучения в этой главе являются бифуркации ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке. Локальные семейства ростков диффеоморфизмов, их эквивалентность, слабая эквивалентность, индуцированные и версальные деформации ростков определяются так же, как и для ростков векторных полей (см. п. 1.5). Для ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке справедливы аналогии теорем сведения ([26, п. 2.4, гл. 6] и п. 1.6, гл. 1). Ограничение ростка диффеоморфизма на центральное многообразие называется *редуцированным ростком* диффеоморфизма. Отметим, что редуцированный росток может менять ориентацию, даже если исходный росток ее не менял; пример:  $x \mapsto \text{diag}(1; -1; 2; -\frac{1}{2})x$ ,  $x \in \mathbb{R}^4$ . Ниже описываются бифуркации ростков диффеоморфизмов, а затем полученные результаты переводятся на язык дифференциальных уравнений.

Пятый параграф посвящен «конечногладкой» теории. В нем исследуются нормальные формы локальных семейств векторных полей и диффеоморфизмов, к которым семейства могут быть приведены конечногладкой заменой координат в фазовом пространстве. Эти нормальные формы полезны для теории нелокальных бифуркаций и релаксационных колебаний.

Параграф 6 посвящен теории Фейгенбаума, в основном, для неодномерных отображений.

## § 1. Бифуркации предельных циклов в типичных однопараметрических семействах

В однопараметрических семействах общего положения при отдельных значениях параметра встречаются предельные циклы, имеющие один мультипликатор<sup>1)</sup>, равный плюс или минус единице, или пару лежащих на единичной окружности комплексно сопряженных мультипликаторов  $\exp(\pm i\omega)$ ; остальные мультипликаторы не лежат на единичной окружности.

Бифуркации с прохождением через единичную окружность комплексно сопряженной пары мультипликаторов полезно изучать в двухпараметрических семействах: перестройки, которые кажутся нелокальными при однопараметрическом подходе, поддаются исследованию локальными методами, если рассматривать задачу, как двухпараметрическую (п. 1.5 ниже).

### 1.1. Мультипликатор 1.

**Определение.** Главной однопараметрической деформацией ростка диффеоморфизма прямой в неподвижной точке с мультипликатором 1 называется одно из двух семейств

$$x \mapsto x + x^2 + \varepsilon \quad (1^+)$$

или

$$x \mapsto x + x^2 - \varepsilon. \quad (1^-)$$

Надстройкой седла (с  $s$ -мерным устойчивым и  $u$ -мерным неустойчивым многообразием,  $s \geq 0$ ,  $u \geq 0$ ) над семейством

$$x \mapsto \omega(x, \varepsilon)$$

называется семейство

$$(x, y, z, u, v) \mapsto \left( \omega(x, \varepsilon), \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}z, 2u, -2v \right), \\ (y, z) \in \mathbb{R}^s, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^u.$$

**Теорема.** В типичных однопараметрических семействах диффеоморфизмов встречаются только такие ростки диффеоморфизмов в неподвижной точке с мультипликатором 1, которые с помощью гомеоморфизма приводятся к виду  $x \mapsto x + x^2$ . Деформации таких ростков в типичных семействах эквивалентны главным деформациям и версальны.

**Требования типичности.** 1. Редуцированный росток диффеоморфизма с мультипликатором 1 имеет вид

$$x \mapsto x + ax^2 + \dots, \quad x \in (\mathbb{R}, 0), \quad a \neq 0.$$

2. Семейство трансверсально многообразию ростков, выделяемых предыдущим требованием.

<sup>1)</sup> Напомним, что мультипликаторы — это собственные числа преобразования монодромии отображения трансверсальной циклу площадки в себя.

З а м е ч а н и е. Доказательство теоремы не просто. Кроме того, справедлива формулируемая ниже неожиданная «теорема о жесткости». Росток гладкого диффеоморфизма прямой в неподвижной точке  $x \mapsto x + ax^2 + \dots$ ,  $a \neq 0$ , представим в виде сдвига за единичное время по фазовым кривым гладкого однозначно определенного векторного поля  $v$ , называемого порождающим:  $v(x) = ax^2 + \dots$ .

Т е о р е м а ([180]). Гомеоморфизм, сопрягающий типичные однопараметрические деформации ростков

$$f: x \mapsto x + ax^2 + \dots, \quad g: x \mapsto x + bx^2 + \dots, \quad x \in (\mathbb{R}, 0), \quad ab \neq 0,$$

соответствующих нулевому значению параметра деформации  $\varepsilon$ , гладок по  $x$  при  $\varepsilon \neq 0$  в проколотой окрестности нуля на прямой и сопрягает порождающие поля ростков  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$ .

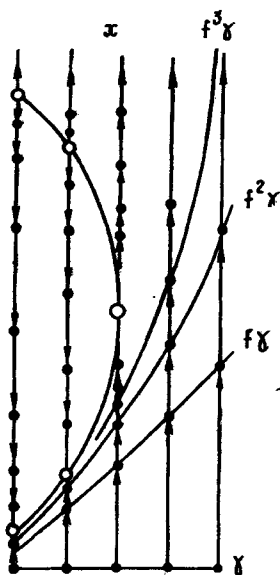


Рис. 17. Орбиты групп степеней ростков диффеоморфизмов семейства  $(1^+)$

Бифуркации орбит диффеоморфизмов в главном семействе  $(1^+)$  изображены на рис. 17. При отклонении  $\varepsilon$  вправо от нуля неподвижная точка исчезает, а при отклонении влево распадается на две гиперболические: притягивающую и отталкивающую. Этой перестройке в соответствующем семействе дифференциальных уравнений на плоскости отвечает столкновение двух предельных циклов — устойчивого и неустойчивого с образованием на мгновение полустойчивого цикла и последующим его исчезновением при  $\varepsilon > 0$ .

## 1.2. Мультипликатор $-1$ и бифуркация удвоения периода.

Определение. Главной однопараметрической деформацией ростка диффеоморфизма прямой в неподвижной точке с мультипликатором  $-1$  называется одно из двух семейств  $\{f_\epsilon\}$ :

$$f_\epsilon: x \mapsto (-1 - \epsilon)x \pm x^3. \quad (2^+)$$

Теорема ([20], [180]). В типичных однопараметрических семействах диффеоморфизмов встречаются только такие ростки диффеоморфизмов в неподвижной точке с мультипликатором  $-1$ , которые с помощью гомеоморфной замены координат превращаются в один из ростков  $x \mapsto x + x^3$  или  $x \mapsto x - x^3$ . Деформации в типичных семействах таких ростков эквивалентны главным деформациям и версальны.

Требования типичности. 1. Редуцированный росток диффеоморфизма с мультипликатором  $-1$  имеет вид  $x \mapsto f(x)$ , причем

$$f^2: x \mapsto x + ax^3 + \dots, \quad a \neq 0.$$

2. Семейство трансверсально многообразию ростков, выделяемых предыдущим требованием.

Замечание. Подробное доказательство теоремы в литературе отсутствует, хотя теорема проще предыдущей и доказывается теми же методами (см. [180]).

В семействе  $(2^+)$  при переходе параметра слева направо через  $0$  происходит мягкая потеря устойчивости. А именно, при  $\epsilon \leq 0$  неподвижная точка  $0$  ростка  $f_\epsilon$  устойчива. При  $\epsilon > 0$  она теряет устойчивость, но возникает «устойчивый цикл периода 2»: пара точек, близких к  $\pm\sqrt{\epsilon}$ , переставляемых диффеоморфизмом  $f_\epsilon$ . Для диффеоморфизма каждая из этих точек неподвижна и устойчива. Этой перестройке соответствует мягкая потеря устойчивости предельным циклом (в предположении, что при  $\epsilon \leq 0$  все остальные мультипликаторы по модулю меньше 1). При  $\epsilon > 0$  исходный цикл сохраняется, но становится неустойчивым, а рядом с ним на расстоянии порядка  $\sqrt{\epsilon}$  появляется устойчивый предельный цикл примерно вдвое большего периода (рис. 18.)

Фейгенбаум [143] открыл, что в типичных однопараметрических семействах диффеоморфизмов на конечном интервале изменения параметра может происходить бесконечное число бифуркаций удвоения периода. Для конкретных отображений последовательности удвоений были численно обнаружены за несколько лет до того экологами (Шапиро А. П., Математические модели в конкуренции. — В книге «Управление и информация». Владивосток, ДВНЦ АН СССР, 1974, вып. 10, 5—75; May R. M., Biological populations, obeying difference equations: stable points, stable cycles and chaos: J. theor. biol., 1975, 51, 511—524).

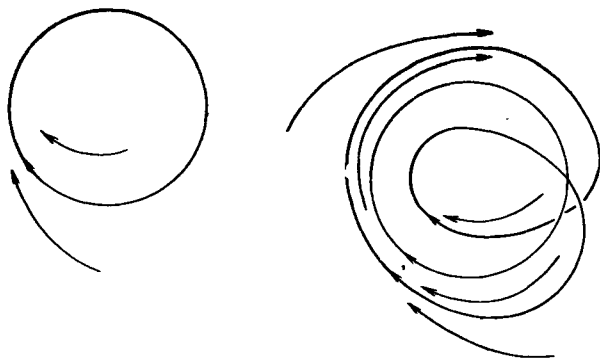


Рис. 18. Бифуркация удвоения периода

Этому и близким явлениям посвящен § 6.

**1.3. Пара комплексно сопряженных мультипликаторов.** Деформации ростков диффеоморфизмов с парой комплексно сопряженных мультипликаторов имеют топологический инвариант, пробегающий единичную окружность (аргумент мультипликатора, по модулю равного единице), и даже в классе ростков с парой мультипликаторов  $e^{\pm i\omega}$  ( $\omega$  фиксировано) конечно параметрические версальные деформации не построены и, видимо, не существуют.

В типичных однопараметрических семействах встречаются ростки с парой мультипликаторов  $e^{\pm i\omega}$ , удовлетворяющие следующему требованию общности положения: заменой координат росток приводится к виду

$$z \mapsto e^{i\omega} z + az |z|^2 + O(|z|^4). \quad (3)$$

«Соизмеримость частот»  $\omega/2\pi = p/q$  с целыми  $p$  и  $q$  называется *резонансом порядка  $q$* . Резонанс называется *сильным*, если его порядок не больше 4.

Требования типичности.

1. Отсутствие сильного резонанса:

$$\omega \neq 2\pi p/q \text{ при } q \leq 4; \quad (3a)$$

2.  $\operatorname{Re} a \neq 0. \quad (3б)$

Всюду в этом пункте предполагается, что сильный резонанс отсутствует; он появляется неустранимым образом только при двух (и более) параметрах.

Деформация ростка (3) с помощью гладко зависящей от параметра замены координат приводится к виду

$$z \mapsto g_{v(z,e)}^1 z + O(|z|^4), \quad (4)$$

где  $g_z^1$  — сдвиг за единичное время вдоль фазовых кривых векторного поля  $\dot{v}$ :

$$v(z, \varepsilon) = z [i\omega + \lambda(\varepsilon) + A(\varepsilon)\rho], \quad (5)$$

$$\rho = z\bar{z}, \quad \lambda(0) = 0, \quad A(0) = a, \quad \operatorname{Re} a \neq 0.$$

Для типичных семейств  $\operatorname{Re} \lambda'(0) \neq 0$ . При прохождении  $\varepsilon$  через 0 в семействе уравнений

$$\dot{z} = v(z, \varepsilon) \quad (6)$$

рождается предельный цикл — окружность с центром 0 и радиусом, пропорциональным  $\sqrt{\varepsilon}$  (п. 2.2, гл. 1). Следовательно, в семействе (4) с отброшенными старшими членами  $O(|z|^4)$  при прохождении параметра через 0 рождается гладкая кривая (окружность), которую диффеоморфизм поворачивает на угол, зависящий от  $\varepsilon$  (поскольку поле  $v(\cdot, \varepsilon)$  инвариантно относительно поворотов).

Бифуркации в исходном семействе существенно сложнее. Гомеоморфная окружности инвариантная кривая действительно рождается, но не является гладкой. Ограничение диффеоморфизма на нее не обязательно эквивалентно повороту. Число вращения диффеоморфизма на инвариантной кривой зависит от параметра и стремится к  $\omega/2\pi$ , когда параметр стремится к критическому значению 0.

Теорема ([87], [173], [191], [192]). Рассмотрим локальное семейство диффеоморфизмов  $(f; 0, 0)$ :

$$f(z, \varepsilon) = e^{i\omega + \lambda(\varepsilon)} z + a(\varepsilon) z \rho + O(\rho^2), \quad \lambda(0) = 0.$$

Пусть росток  $f(\cdot, 0)$  удовлетворяет требованиям типичности (3a) и (3б), а само семейство удовлетворяет следующему условию трансверсальности:

$$\operatorname{Re} \lambda'(0) \neq 0.$$

Тогда в локальном семействе  $(f; 0, 0)$  при прохождении  $\varepsilon$  через 0 (вправо, если  $\operatorname{Re} \lambda'(0) \operatorname{Re} a < 0$  и влево при обратном неравенстве) рождается инвариантная кривая, гомеоморфная окружности и обходящая 0. Гладкость этой кривой, вообще говоря, конечна, но стремится к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Теорема ([180]). Если две типичные однопараметрические деформации ростков диффеоморфизмов  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  с парой невещественных мультипликаторов на единичной окружности топологически эквивалентны, то мультипликаторы деформируемых ростков совпадают.

Эта теорема следует из топологической инвариантности числа вращения для диффеоморфизма окружности.

**1.4. Нелокальные бифуркации в однопараметрических семействах диффеоморфизмов.** Число вращения диффеоморфизма семейства (4) на его инвариантной кривой меняется с измене-

нием параметра. Когда оно иррационально, орбиты группы степеней роста диффеоморфизма всюду плотны на инвариантной кривой; когда оно рационально — тогда в типичном семействе, в отличие от его укорочения (4), (5), (6), возникает конечное число длиннопериодических циклов (период равен знаменателю несократимой дроби, задающей число вращения).

Это явление удобно изучать, рассматривая двухпараметрическое семейство диффеоморфизмов, в котором параметр пропорционален логарифму комплексного мультипликатора: его вещественная и мнимая части — два вещественных параметра семейства. Заменой координат такое семейство приводится к виду

$$z \rightarrow e^{i\epsilon} z + A(\epsilon) z^p + O(|z|^4), \quad (7)$$

если  $\epsilon$  пробегает окрестность любого значения  $\omega$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ , не содержащую «точек сильного резонанса»  $\epsilon \neq 2\pi p/q$  при  $1 \leq q \leq 4$ . Пусть  $\operatorname{Re} A(\omega) < 0$ . Тогда инвариантная кривая рождается при переходе параметра  $\epsilon$  из нижней в верхнюю полуплоскость вблизи точки  $\omega$ . Можно доказать<sup>1)</sup>, что эта кривая конечно гладко зависит от параметра  $\epsilon$ , пробегающего пересечение некоторой окрестности точки  $\omega$  с верхней полуплоскостью. Областью резонанса  $p/q$  называется множество значений параметра  $\epsilon$ , для которых число вращений диффеоморфизма (7) на его инвариантной кривой равно  $p/q$ . Область резонанса  $p/q$  расположена в верхней полуплоскости и подходит к вещественной оси в точке  $2\pi p/q$  узким языком: ограничивающие его кривые касаются, как две параболы степени  $(q-2)/2$  (рис. 19). Расположение этих зон напоминает расположение резонансных зон для семейства диффеоморфизмов окружности, заданных тригонометрическими полиномами, то есть напоминает задачу типа Матве в смысле [23]; (см. рис. 11 из [26]).

Типичное однопараметрическое семейство, индуцированное из (7), попадает в счетное число резонансных зон на любом ин-



Рис. 19. Бифуркационная диаграмма семейства диффеоморфизмов (7) и соответствующего семейства дифференциальных уравнений. Жирной линией выделены база однопараметрического семейства и вещественная ось

<sup>1)</sup> Это легко сделать с помощью рассуждений [173, гл. 6], но, кажется, явные формулировка и доказательство в литературе отсутствуют.



тервале, содержащем вещественное значение параметра, отличное от сильно резонансного. При прохождении параметра через это значение рождается и умирает счетное число циклов, период которых тем больше, чем ближе параметр к вещественной оси (В. С. Козякин [20, стр. 283]); см. рис. 19.

**1.5. Нелокальные бифуркации периодических решений.** Пусть при нулевом значении параметра в типичном однопараметрическом семействе дифференциальных уравнений в трехмерном фазовом пространстве имеется устойчивый предельный цикл с парой мультипликаторов  $e^{\pm i\omega}$  на единичной окружности (устойчивости можно добиться обращением времени). Поскольку семейство однопараметрическое и типичное, можно считать, что  $\omega \neq 2\pi p/q$  при  $q \geq 4$ . Тогда при прохождении параметра через 0 в направлении, соответствующем переходу мультипликатора изнутри единичной окружности наружу, рядом с предельным циклом возникает инвариантный тор толщины порядка  $\sqrt{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — параметр семейства. На этом торе при изменении параметра в бесконечном количестве рождаются и умирают длиннопериодические предельные циклы. При дальнейшем возрастании параметра тор теряет гладкость и может превратиться в странный аттрактор, как это описано ниже.

**1.6. Бифуркации распада инвариантных торов.** Пусть в типичном двухпараметрическом семействе  $C^k$ -гладких векторных полей,  $k \geq 4$ , при нулевом значении параметра  $\epsilon$  предельный цикл теряет устойчивость и рождается устойчивый инвариантный тор. Тогда, как было показано выше, на плоскости параметров существуют резонансные языки, отвечающие наличию у векторного поля невырожденных предельных циклов, лежащих на торе. При этом сам тор является объединением неустойчивых многообразий седловых циклов с устойчивыми циклами.

Представляет большой интерес выяснение сценариев перехода от периодического режима, отвечающего наличию устойчивого цикла на торе, к режиму непериодических колебаний, которому может соответствовать странный аттрактор. Это важно, в первую очередь, потому, что численное и лабораторное или даже натурное исследование большого количества физических и других задач (течение Куэтта, конвекция в плоском слое жидкости, генерация колебаний и радиотехнических и СВЧ генераторах и т. д.) показывает, что возникновение стохастических колебаний при разрушении двумерного тора, на котором число вращения рационально, — широко распространенное явление. Прежде, чем инвариантный тор разрушится, он должен потерять гладкость, оставаясь еще некоторое время топологическим подмногообразием фазового пространства. Способы потери удобно демонстрировать на примере отображения кольца в себя, которое при начальных значениях параметров имеет гладкую инвариантную кривую. Конкретный вид отображения здесь несуществен, например, оно может быть таким, как в [34], или

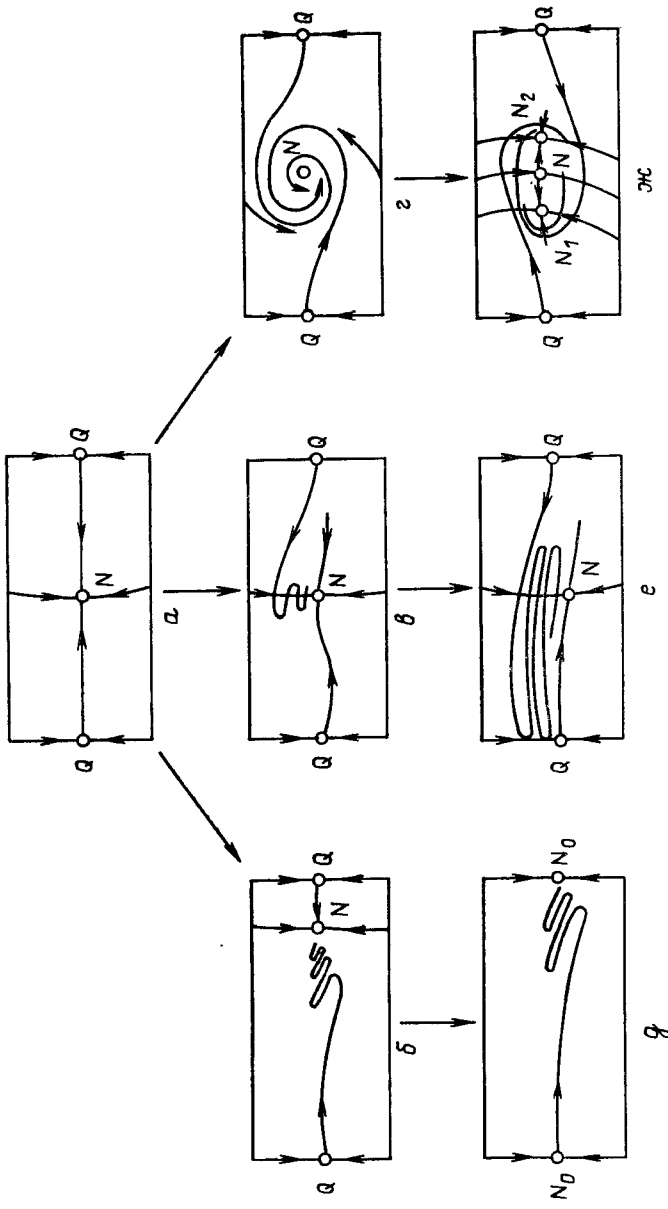


Рис. 20. Сценарии разрушения двумерного инвариантного тора

в п. 8.5 гл. 3, поэтому укажем лишь геометрическую картину (рис. 20). На этом рисунке кольцо изображено в виде прямоугольника, левая и правая стороны которого отождествлены и состоят из точек устойчивого многообразия неподвижной точки на границе: седло-узла на рис. 20д и седла для всех остальных. В начальной ситуации *a* инвариантная кривая гладкая. В случаях *b*, *в*, *г* инвариантная кривая еще непрерывна, но уже не имеет касательной в устойчивой неподвижной точке *N*. Устойчивая точка в случаях *b* и *в* — узел, причем в случае *b* неустойчивое многообразие седла *Q* не пересекает, в случае *в* пересекает неведущее многообразие узла *N* (инвариантное многообразие узла, соответствующее большему по модулю собственному значению. В случае же *г* устойчивая точка — фокус, мультипликаторы ее комплексны.

Оставшиеся рисунки иллюстрируют дальнейшие возможные изменения фазового портрета. На рис. 20д показан момент образования *s*-критического седло-узла<sup>1)</sup>; его исчезновение приведет к рождению странного аттрактора. На рис. 20е изображено первое простое касание неустойчивого и устойчивого многообразий точки *Q*. В этот момент и при дальнейшем изменении параметров, приводящем к рождению гомоклинических точек трансверсального пересечения, аттрактор в кольце является странным. На рис. 20ж уже произошла бифуркация удвоения периода точки *N* и возникла устойчивая двоякопериодическая траектория (замкнутой инвариантной кривой не стало). При дальнейшем изменении параметров может реализоваться каскад

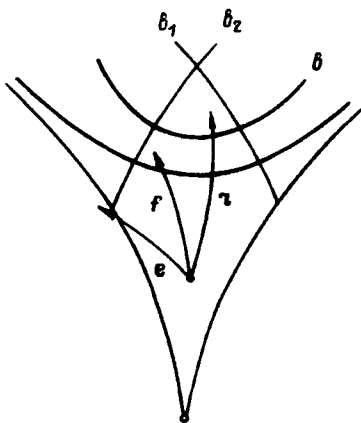


Рис. 21. Бифуркационные кривые, соответствующие перестройке инвариантного тора

<sup>1)</sup> *s* — критический седло-узел определен и его бифуркации исследованы в § 4 главы 3.

бифуркаций удвоения периода и возникнуть аттрактор Фейгенбаума. Впрочем, точка  $N$  может потерять устойчивость и иным способом, например, может возникнуть замкнутая инвариантная кривая, с которой могут произойти те же изменения, что и с исходной.

На рис. 21 изображена типичная бифуркационная диаграмма в резонансном языке. В точке 0 диффеоморфизм, как на рис. 20а; изменениям параметра вдоль кривых  $b$ ,  $f$  и  $r$  отвечают последовательности бифуркаций, изображенные в левом, среднем и правом столбцах рис. 20 соответственно.  $b_1$ ,  $b_2$  — бифуркационные кривые, отвечающие образованию точек простого касания на каждом из лучей  $W_Q^u \setminus Q$ , а  $b$  — бифуркационная кривая, отвечающая смене устойчивости точки  $N$ .

Для одной и той же системы потеря устойчивости неподвижной точки в разных резонансных языках может происходить по-разному.

## § 2. Бифуркации циклов в типичных двупараметрических семействах при однократном дополнительном вырождении

Этот параграф начинается с перечня вырождений, встречающихся в типичных двупараметрических семействах ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке и соответствующих изолированным значениям параметров. Бифуркации неподвижных точек с мультипликатором 1 или  $-1$  с дополнительным вырождением в нелинейных членах во многом напоминают бифуркации особых точек с собственным значением 0. Напротив, бифуркации в случае пары комплексно сопряженных мультипликаторов при дополнительном вырождении в нелинейных членах, наряду с появлением замкнутых инвариантных кривых, приводят к совершенно новым эффектам.

### 2.1. Перечень вырождений.

1°. Один мультипликатор 1 с дополнительным вырождением в нелинейных членах.

2°. Один мультипликатор  $-1$  с дополнительным вырождением.

3°. Пара не вещественных мультипликаторов на единичной окружности с дополнительным вырождением.

4°. Один двукратный мультипликатор 1; линейная часть в нуле эквивалентна унипотентной жордановой клетке  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5°. Один мультипликатор 1 и один  $-1$ .

6°. Один двукратный мультипликатор  $-1$ .

7°. Пара мультипликаторов  $e^{\pm i\omega}$ ,  $\omega = 2\pi p/q$ ,  $q = 3$  или 4.

8°. Тройка мультипликаторов  $e^{\pm i\omega}$ , 1.

9°. Тройка  $e^{\pm i\omega}$ ,  $-1$ .

10°. Две пары  $e^{\pm i\omega_1}$ ,  $e^{\pm i\omega_2}$ .

Случаи 5°—7° называются случаями *сильного резонанса*.

Случаи 8° и 10° в определенном смысле сводятся к исследованию бифуркаций положений равновесия с нулевым и парой чисто мнимых собственных значений и с двумя мнимыми парами соответственно. Специальные исследования бифуркаций неподвижных точек диффеоморфизмов в случаях 8°—10°, насколько нам известно, не проводились.

В этом параграфе исследуются деформации ростков с вырождениями первых трех типов.

**2.2. Мультипликатор 1 или  $-1$  с дополнительным вырождением в нелинейных членах.**

Определение 1. Главной  $\nu$ -параметрической деформацией ростка диффеоморфизма прямой в неподвижной точке с мультипликатором 1 называется одно из двух семейств

$$x \mapsto x \pm x^{\nu+1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_\nu x^{\nu-1}. \quad (8^\pm)$$

Определение 2. Главной  $\nu$ -параметрической деформацией ростка диффеоморфизма прямой в неподвижной точке с мультипликатором  $-1$  называется одно из двух семейств

$$x \mapsto -x \pm x^{2\nu+1} + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^3 + \dots + \varepsilon_\nu x^{2\nu-1}. \quad (9^\pm)$$

«Теорема». В типичных  $\mu$ -параметрических семействах ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке встречаются только такие ростки с мультипликатором 1 (или  $-1$ ) и одномерным центральным многообразием, вблизи которых семейства локально слабо эквивалентны надстройке седла над одним из главных семейств  $(8^\pm)$  (соответственно,  $(9^\pm)$ ) при  $\nu \leq \mu$ ; случаю  $\nu = \mu$  отвечают изолированные точки пространства параметров. Эти локальные семейства слабо версальны.

З а м е ч а н и е. Слово «теорема» заключено здесь в кавычки, поскольку доказательство, насколько нам известно, не опубликовано. Классификация описанных в теореме семейств диффеоморфизмов с обычным отношением эквивалентности при  $\mu \geq 3$  имеет функциональные модули (см. п. 5.11 главы 2).

**2.3. Пара мультипликаторов на единичной окружности с дополнительным вырождением в нелинейных членах** (см. [130] и [131: 6—13]). Следуя Шансине, рассмотрим росток диффеоморфизма  $f_0: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  с парой не вещественных мультипликаторов на единичной окружности и дополнительным вырождением: нарушается требование (36).

Типичная двупараметрическая деформация этого ростка заменной координат и параметров приводится к виду

$$z \mapsto N_{\varepsilon, a}(z) + O(|z|^5); \quad N_{\varepsilon, a} = g_{\nu, \varepsilon, a}^1.$$

Здесь

$$v_{\varepsilon, a}(z) = vz + z(\tilde{A}|z|^2 + B|z|^4),$$

$$v = i\omega + \varepsilon + i\alpha(\varepsilon), \quad \tilde{A} = ia_0 + a + ia_1(\varepsilon, a),$$

$$B = B(\varepsilon, a), \quad \operatorname{Re} B(0, 0) < 0;$$

выполнения последнего неравенства можно добиться обращением времени. Пространство параметров  $(\varepsilon, a)$  разбивается на 3 области (рис. 22), соответствующие одной, двум или пустому множеству замкнутых инвариантных кривых поля  $v_{\varepsilon, a}$  и отображения  $N_{\varepsilon, a}$  (эти кривые — окружности). Кривая  $\Gamma$ , на которой сливаются, исчезая, две инвариантные окружности, задается уравнением

$$4\varepsilon b + a^2 = 0, \quad b = \operatorname{Re} B, \quad a \geq 0,$$

и напоминает ветвь параболы

$$a^2 = -4\varepsilon b(0, 0), \quad a \geq 0$$

(ср. рис. 7).

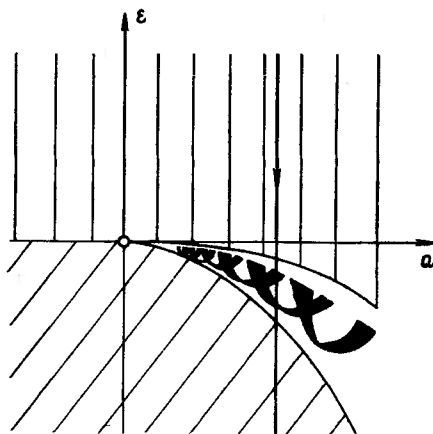


Рис. 22. Зоны существования замкнутых инвариантных кривых вблизи линии  $\Gamma$  закрашены черным. Зоны, где возмущенное отображение имеет столько же замкнутых инвариантных кривых, сколько и невозмущенное, заштрихованы

Следующая теорема сравнивает поведение нормализованных отображений  $N_{\varepsilon, a}$  с отображениями, возникающими при типичной деформации ростка  $f_0$ . При одних значениях параметров наблюдается сходство, а при других — резкие различия в геометрических свойствах возмущенного и невозмущенного отображений.

**Теорема ([130]).** Рассмотрим семейство  $f$  ростков диффеоморфизмов

$$f_{\varepsilon, a}: z \mapsto N_{\varepsilon, a}(z) + O(|z|^5).$$

Пусть число  $\omega$  удовлетворяет условию Зигеля: для некоторых положительных  $C$  и  $\sigma$  и для любого рационального  $p/q$  выполняется неравенство  $|\omega - p/q| \geq Cq^{-(2+\sigma)}$ . Тогда для любого натурального  $k$  существуют окрестность нуля  $U$  и окрестность  $W$  «параболы»  $\Gamma \setminus \{0\}$ , ограниченная кривой  $\partial U$  и двумя кривыми, касающимися в нуле, такие что:

1. Для любой пары  $(\varepsilon, a)$  из разности  $U \setminus W$  отображение  $f_{\varepsilon, a}$  имеет столько же замкнутых инвариантных кривых, сколько и  $N_{\varepsilon, a}$ ; эти кривые гладки класса  $C^k$ .

2. Внутри окрестности  $W$  существует «близкое к  $\Gamma$ » канторово множество, для каждой точки  $(\varepsilon, a)$  из которого отображение  $f_{\varepsilon, a}$  имеет единственную замкнутую инвариантную кривую. Кроме того, точка  $(\varepsilon, a)$  является вершиной двойной воронки (закрашена черным на рис. 22). Для всех значений  $(\varepsilon', a')$  из левой (правой) половины воронки отображение  $f_{\varepsilon', a'}$  имеет притягивающую (отталкивающую) замкнутую инвариантную кривую.

Шансине [131 : 10] утверждает также, что в области  $W$  сколь угодно близко к нулю существуют такие значения параметра  $(\varepsilon, a)$ , для которых отображение  $f_{\varepsilon, a}$  имеет в любой окрестности нуля сколь угодно много периодических точек и гомоклинических кривых. Подобные эффекты ранее наблюдались для ростков диффеоморфизмов плоскости только при наличии вырождений коразмерности бесконечность.

Отметим в заключение, что информация о преобразованиях монодромии стандартным образом переводится на язык дифференциальных уравнений: неподвижным или периодическим точкам соответствуют замкнутые траектории, инвариантным окружностям — инвариантные торы или бутылки Клейна и т. д.

### § 3. Бифуркации циклов в типичных двупараметрических семействах при сильных резонансах порядка $q \neq 4$

Типичные диффеоморфизмы с двумя мультипликаторами — корнями из единицы, вероятно, не имеют конечно параметрических версальных деформаций.

Вместо семейств диффеоморфизмов в этом параграфе рассматриваются семейства векторных полей, сдвиги по траекториям которых за единичное время приближают исходные семейства диффеоморфизмов.

Таким образом, в качестве упрощенной модели двупараметрического семейства диффеоморфизмов вблизи резонанса  $e^{i\omega}$ ,  $\omega = 2\pi p/q$ , мы рассматриваем семейство сдвигов за единичное время вдоль траекторий  $Z_q$  — эквивариантных векторных полей. Нормальные формы семейств таких полей описаны в п.п. 3.3 и 3.4. Хотя эти упрощенные семейства сдвигов не эквивалентны исходным семействам диффеоморфизмов, тем не менее они обладают многими свойствами, присущими исходным семействам.

Другими словами, мы ограничиваемся исследованием бифуркаций в факторсистеме упрощенной нормальной формы семейства уравнений в окрестности цикла. Истолкование результатов в терминах исходной системы требует дополнительной работы, так как даже топологически бифуркации в исходной системе и в упрощенной нормальной форме не всегда одинаковы (см.; например, п. 3.5). Начнем с построения вспомогательных семейств векторных полей на плоскости, сдвиг вдоль которых приближает преобразование монодромии циклов в случае сильного резонанса.

**3.1. Нормальная форма в случае унипотентной жордановой клетки.** Росток диффеоморфизма в неподвижной точке на плоскости с унипотентной линейной частью может быть реализован как преобразование монодромии периодического дифференциального уравнения с нильпотентной линейной частью

$$\dot{x} = Jx + f(x, t), \quad x \in (\mathbb{R}^2, 0),$$

$$t \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(0, t) \equiv 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, t) \equiv 0.$$

Такое уравнение формальной, периодической по  $t$ , заменой приводится к автономной (не содержащей  $t$ ) форме:

$$\dot{x} = Jx + \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) = 0.$$

Деформация предыдущего неавтономного уравнения такой же заменой приводится к виду

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + F(x, \varepsilon), \quad A(0) = J, \quad F(x, 0) = \tilde{f}(x).$$

Более того, существует гладкая замена, переводящая исходную деформацию в семейство, отличающееся от выписанного автономного на добавок, плоский на окружности  $x=0$ ,  $\varepsilon=0$ . Эта «почти автономная» деформация изучена мало; зато подробно изучены получаемые отбрасыванием плоского добавка деформации ростков векторных полей в особой точке с ненулевой нильпотентной линейной частью на плоскости. Эти деформации описаны в п. 4.2 главы 1.

Аналогично, отбрасывая плоский добавок, деформацию роста диффеоморфизма в остальных случаях сильного резонанса можно превратить в деформацию сдвига по фазовым кривым векторного поля так, что сдвиг и деформация будут эквивалентны относительно конечной группы движений. Для пары мультипликаторов 1 и  $-1$  это будет группа  $S_2$ , порожденная симметрией  $(x, r) \mapsto (x, -r)$ ; для пары  $\exp(\pm 2\pi i p/q)$  это будет группа  $Z_q$ , порожденная поворотом на  $2\pi/q$ .

Редукцию задачи о деформациях ростков диффеоморфизмов к задаче об эквивариантных деформациях ростков векторных полей (в случае резонанса  $\omega = 2\pi p/q$  или пары мультипликато-



ров 1, —1) можно провести с помощью усреднения в слоении Зейферта или Мёбиуса, как это сделано ниже.

**3.2. Усреднение в слоениях Зейферта и Мёбиуса.** Рассмотрим в произведении  $S^1 \times \mathbb{C}$  дифференциальное уравнение  $\dot{z} = i\omega z$ ,  $\omega = p/q$ ,  $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Разбиение расширенного фазового пространства  $S^1 \times \mathbb{C}$  на интегральные кривые этого уравнения называется слоением Зейферта типа  $p/q$ . Все решения этого уравнения, кроме нулевого,  $2\pi q$ -периодичны и каждая интегральная кривая переходит в себя при повороте в плоскости  $z$  на угол  $2\pi p/q$ .

Пусть  $v$  — произвольное вертикальное (касающееся слоев  $\{t\} \times \mathbb{C}$ ) векторное поле в расслоенном над  $S^1$  произведении  $S^1 \times \mathbb{C}$ . Усредним его по времени вдоль интегральных кривых предыдущего уравнения. Под этим понимается следующая. Поле  $v$  определяет поле  $\tilde{v}$  на универсальной накрывающей  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  пространства  $S^1 \times \mathbb{C}$ , переходящее в себя при сдвигах  $\mathbb{R}$  на  $2\pi$ . Фиксируем начальное сечение, скажем  $\{t_0\} \times \mathbb{C}$ . Все пространство расслоения  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  отображается на это сечение так, что каждая фазовая кривая поля  $i\omega z d/dz + d/dt$  переходит в свою точку на начальном сечении. Это отображение переносит векторы накрывающего поля  $v$  в начальное сечение. В каждой точке начального сечения возникает периодически зависящий от  $t$  вектор. Усредняя его по  $t$ , получаем вектор усредненного поля в рассматриваемой точке плоскости  $\mathbb{C}$ .

Эта операция и называется *усреднением в слоении Зейферта*. Произвольное векторное поле  $v$  при усреднении в слоении Зейферта превращается в  $\mathbb{Z}_q$ -эквивариантное векторное поле на плоскости.

Рассмотрим еще произведение листа Мёбиуса на прямую, получаемое из пространства  $\mathbb{R}^3$  отождествлением точек  $(t, x, r)$  и  $(t + 2\pi, x, -r)$ . Разбиение этого пространства на интегральные кривые уравнения  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{r} = 0$  называется слоением Мёбиуса. Это слоение является «линейным приближением» при изучении предельного цикла с мультипликаторами  $+1$  и  $-1$ . При усреднении в этом слоении возникают  $S_2$ -эквивариантные векторные поля на плоскости, деформации которых описаны в п. 4.4 главы 1.

### 3.3. Главные поля и деформации.

Определения. 1. Главными особыми  $\mathbb{Z}_q$ -эквивариантными уравнениями и полями при  $q > 2$  называются уравнения

$$\dot{z} = Az|z|^2 + B\bar{z}^{q-1}, \quad z \in \mathbb{R}^2,$$

и соответствующие им векторные поля на плоскости.

2. Главной деформацией главного особого  $\mathbb{Z}_q$ -эквивариантного векторного поля  $v_0 (q > 2)$  называется двухпараметрическое

семейство  $v_\varepsilon = \varepsilon z + v_0$ , где параметрами являются вещественная и мнимая часть  $\varepsilon$ .

3. Главными особыми  $Z_q$ -эквивариантными уравнениями и полями при  $q=2$  и  $q=1$  называются соответственно уравнения  $\dot{x} = ax^3 + bx^2y$  ( $q=2$ ),  $\dot{x} = ax^2 + bxy$  ( $q=1$ ) и задающие их векторные поля на фазовой плоскости  $(x, y = \dot{x})$ .

4. Главной деформацией главного особого поля при  $q=2$  и  $q=1$  называется деформация, состоящая в прибавлении к правой части уравнения второго порядка слагаемых  $\alpha x + \beta y$  ( $q=2$ ) и  $\alpha + \beta x$  ( $q=1$ ).

Список главных деформаций главных особых  $Z_q$ -эквивариантных векторных полей следующий

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az |z|^2 + Bz^{\bar{q}-1}, \quad q \geq 3,$$

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y + ax^3 + bx^2y, \quad q=2,$$

$$\dot{x} = \alpha + \beta x + ax^2 + bxy, \quad q=1.$$

Здесь переменные  $z, \varepsilon, A, B$  — комплексные,  $x, y, \alpha, \beta, a, b$  — вещественные, параметры деформации обозначены греческими буквами;  $y = \dot{x}$ .

#### 3.4. Версальность главных деформаций.

«Теорема». Все главные особые  $Z_q$ -эквивариантные поля при каждом  $q$  можно разделить на вырожденные и невырожденные так, что:

1) В типичных двухпараметрических семействах ростков  $Z_q$ -эквивариантных векторных полей в нуле встречаются только такие ростки с нильпотентной линейной частью, которые эквивалентны одному из невырожденных главных полей.

2) Соответствующие локальные семейства эквивалентны главным деформациям и версальны.

3) Вырожденные поля образуют объединение конечного числа подмногообразий в пространстве главных особых полей.

3) Невырожденные поля образуют объединение конечного числа открытых связных областей.

5) Главные деформации ростков невырожденных полей в каждой компоненте связности топологически эквивалентны.

Слово «теорема» заключено здесь в кавычки потому, что теорема доказана лишь при  $q \neq 4$  [20], [21], [104]. При  $q \neq 4$  условия невырожденности можно выписать явно:  $a \neq 0, b \neq 0$  при  $q=1; 2; \operatorname{Re} A \neq 0, B \neq 0$  при  $q=3$  и  $q \geq 5$ . Бифуркационные диаграммы и перестройки фазовых портретов при  $q=1$  приведены выше на рис. 10, при  $q=2$  — на рис. 23 (заменами времени добиваемся  $b < 0$ ); при  $q=3$  и  $q=5$  — на рис. 24, 25 (заменами времени добиваемся  $\operatorname{Re} A < 0$ ).

3.5. Бифуркации стационарных решений периодических дифференциальных уравнений при сильных резонансах порядка  $q \neq 4$ .

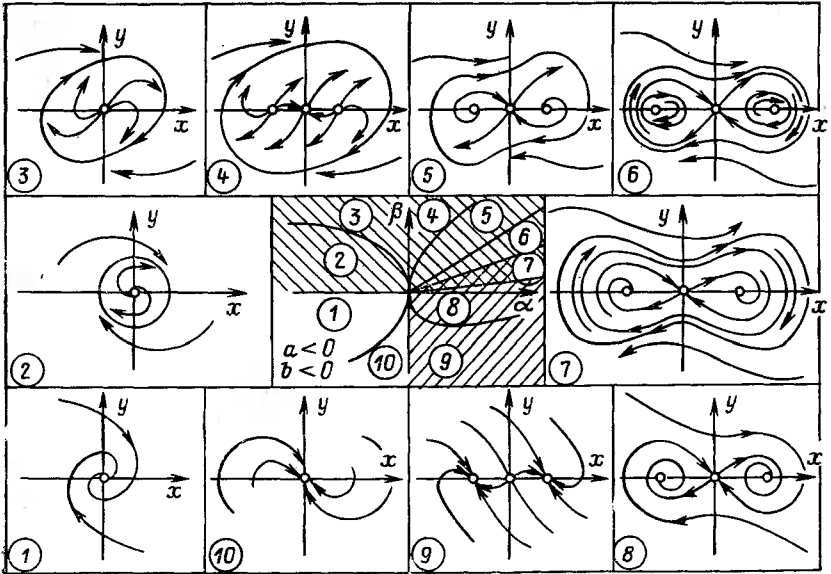
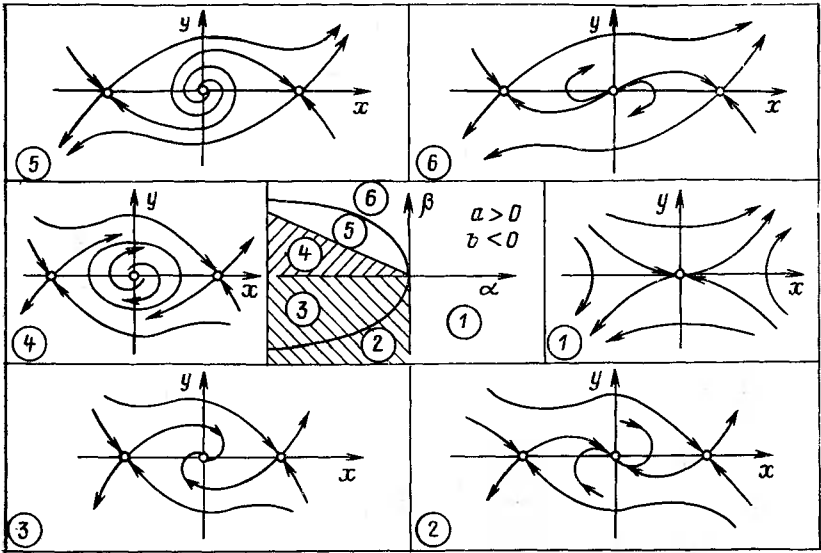


Рис. 23. Бифуркации в главном  $Z_2$ -эквивариантном семействе

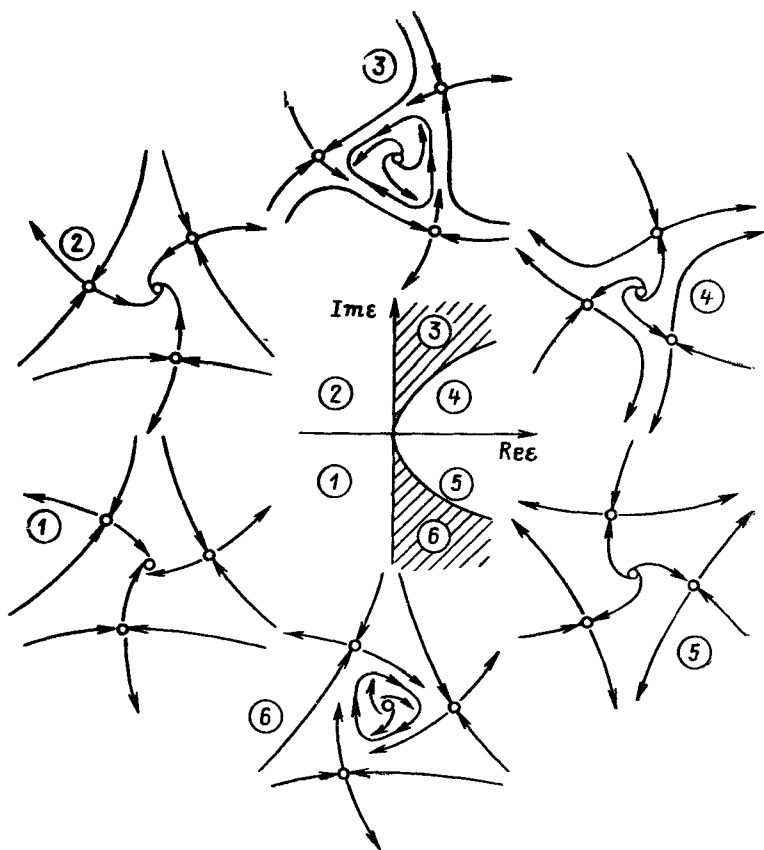


Рис. 24. Бифуркации в главном  $Z_3$ -эквивариантном семействе

В каждом из главных  $Z_q$ -эквивариантных семейств при некоторых значениях параметров, образующих линии на плоскости  $\varepsilon$ , возникают сепаратрисные многоугольники. Сдвиг по фазовым кривым поля семейства за единицу времени приближает  $q$ -ю степень преобразования монодромии предельного цикла, теряющего устойчивость с прохождением пары мультипликаторов через сильный резонанс. Особым точкам поля семейства соответствуют неподвижные точки  $q$ -й степени преобразования монодромии и  $2\pi q$ -периодические циклы периодического уравнения; входящим и выходящим сепаратрисам седел — устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек. Две сепаратрисы особых точек, раз пересекшись, должны совпадать на всем своем протяжении. Не так обстоит дело с инвариантными кривыми неподвижных точек диффеоморфизмов. Эти кривые пересекаются, вообще говоря, трансверсально, а для диффеомор-

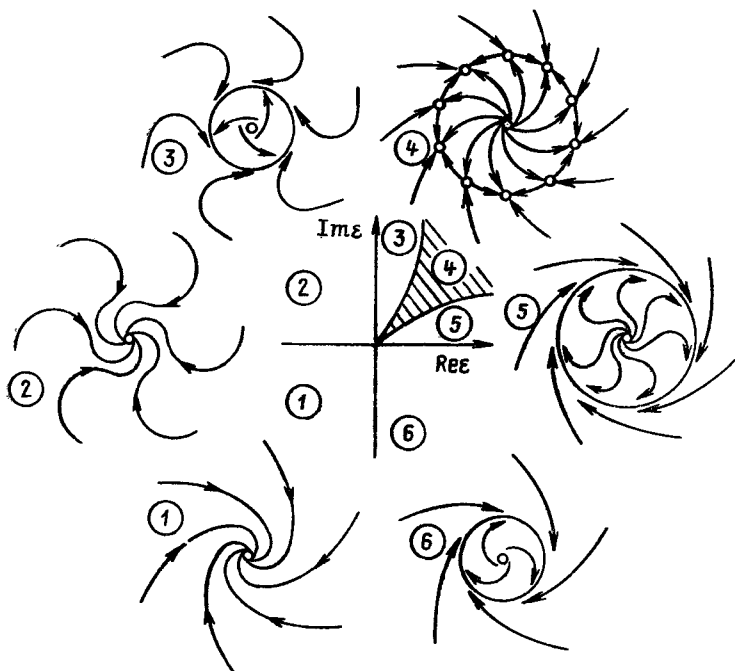


Рис. 25. Бифуркации в главном  $Z_5$ -эквивариантном семействе

физмов типичного однопараметрического семейства могут касаться при некоторых значениях параметров. Такое касание называется гомоклиническим или гетероклиническим в зависимости от того, касаются ли инвариантные кривой одной или разных особых точек диффеоморфизма. Рассмотрим значение параметра главного  $Z_q$ -эквивариантного семейства, соответствующее векторному полю с петлей сепаратрисы (случай  $q=1, 2$ ) или сепаратрисным многоугольникам (случаи  $q=2, 3, 4$ ). Следует ожидать, что существует близкое значение параметра семейства периодических дифференциальных уравнений, которому соответствует гомоклиническое или гетероклиническое касание инвариантных многообразий неподвижных точек  $q$ -й степени преобразования монодромии. Бифуркации таких диффеоморфизмов описаны в § 6 главы 3. Здесь отметим только, что при таких бифуркациях возникают, как правило, нетривиальные гиперболические множества.

**Гипотеза.** В типичных двухпараметрических семействах векторных полей, в которых происходит потеря устойчивости предельным циклом с прохождением через сильный резонанс, встречаются векторные поля с нетривиальными гиперболическими множествами. Соответствующие им значения параметра подходят к критическим узкими языками.

Замечания. 1. Насколько нам известно, эта гипотеза не доказана, хотя близкие утверждения формулировались давно ([20, § 21з]).

2. Объединение гиперболического множества, возникающего при гомоклиническом касании, и всех траекторий, которые к нему притягиваются, вообще говоря, имеет в фазовом пространстве меру нуль. Однако множество траекторий положительной меры находится вблизи гиперболического чрезвычайно долгое, по сравнению с периодом цикла, время (с точки зрения физического наблюдателя это время можно считать бесконечным). Поэтому при потере устойчивости предельным циклом вблизи сильного резонанса следует ожидать возникновения хаоса.

3. Рассмотрим однопараметрическое семейство, в котором происходит потеря устойчивости предельным циклом при переходе пары мультипликаторов через единичную окружность вблизи точки  $-1$ . При изменении параметра семейства возможна такая последовательность событий: устойчивый цикл мягко теряет устойчивость с образованием тора, на котором быстро образуется перетяжка, так что форма меридиана тора приближается к восьмерке; при подходе к центру восьмерки (где находится неустойчивый цикл) притягивающее множество, оставаясь близким к тору с почти стянувшимся в восьмерку меридианом, разрушается вблизи гомоклинической сепаратрисы (Ю. И. Неймарк).

В этом случае фазовая траектория совершает витки вокруг то одной, то другой половины разрушенного тора, перескакивая с одной стороны на другую случайным на вид образом.

#### § 4. Бифуркации предельных циклов при прохождении пары мультипликаторов через $\pm i$

Для исследования потери устойчивости циклом с мультипликаторами, близкими к  $\pm i$ , необходимо изучить семейство уравнений

$$z = \delta z + Pz|z|^2 + Qz^3. \quad (10)$$

Ниже описываются бифуркации фазовых портретов в этом семействе.

**4.1. Вырожденные семейства.** Здесь ищутся те значения  $P$  и  $Q$ , при которых в семействе (10) с параметром  $\delta \in \mathbb{C} \setminus 0$  (при фиксированных  $P$  и  $Q$ ) происходят нетипичные бифуркации.

**Лемма.** Семейство (10) с параметром  $\delta \in \mathbb{C} \setminus 0$  при  $PQ \neq 0$  эквивалентно (может быть, после обращения времени) индуцированному из семейства

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^3 \quad (11_A)$$

с параметром  $\varepsilon : |\varepsilon| = 1$ , причем  $A = a + bi$ ,  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$ .

◀ Равенства  $|\varepsilon| = 1$  можно добиться умножением времени на подходящую константу. Изменяя, если нужно, знаки времени и

Im  $z$ , добиваемся неравенств  $a \leq 0, b \leq 0$ . Подобием  $z \rightarrow cz$  добиваемся равенства  $B=1$ . Каждое преобразование сохраняет результаты предыдущих, и вместе они превращают семейство (10) в семейство (11). ►

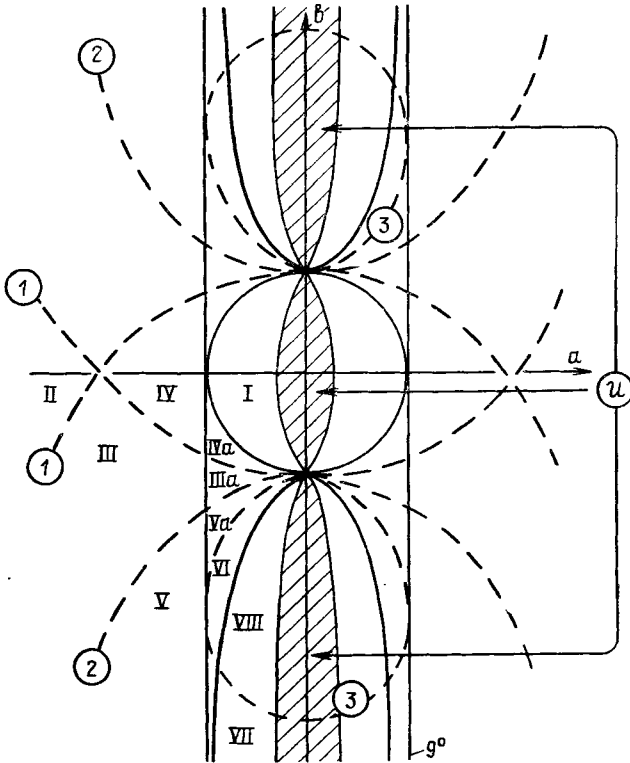


Рис. 26. Множество значений  $A$ , соответствующих вырожденным главным  $Z_4$ -эквивариантным семействам (показано жирными и пунктирными линиями). Заштрихована область значений параметра  $A$ , для которой исследованы предельные циклы в семействах  $(11_A)$

Значения  $A$ , для которых в однопараметрическом семействе  $(11_A)$  встречаются вырождения коразмерности 2 или выше, будем называть вырожденными. Найденные в настоящее время вырожденные значения  $A$  изображены на рис. 26; сплошные линии найдены аналитически, пунктирные — численно.

**4.2. Вырожденные семейства, найденные аналитически.** Названные семейства описаны в таблице ниже (см. табл. 1). В первом столбце указаны компоненты множества вырожденных значений  $A$ , во втором — вырождения коразмерности выше 1.

происходящее в соответствующих семействах (11<sub>A</sub>), в третьем — значение  $\alpha$  ( $\epsilon = e^{i\alpha}$ ), при котором это вырождение происходит (иногда  $\alpha$  задается неявно).

Т а б л и ц а 1

Компонента	Вырождение	Значения $\alpha$
$a^2 + b^2 = 1$	Вырожденные особые точки рождаются на бесконечности	$ a \sin \alpha - b \cos \alpha  = 1$
$b = \pm \frac{1+a^2}{\sqrt{1-a^2}}$	Особые точки, отличные от нуля, неэлементарны (оператор линеаризации — нильпотентный).	$ a \sin \alpha - b \cos \alpha  = 1$
$ a  = 1$	Одновременно происходят две бифуркации коразмерности 1: ненулевые особые точки становятся вырожденными, и особая точка 0 меняет характер устойчивости.	$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$
$a = 0$	Уравнение гамильтоново	$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

**4.3. Вырожденные семейства, найденные численно.** Названные семейства соответствуют объединению трех линий, показанных пунктиром на рис. 26. Если  $A$  принадлежит линии 1 или 2, то одно из уравнений семейства (11<sub>A</sub>) имеет сложный цикл (сепаратрисный многоугольник) с четырьмя особыми точками типа седло-узел, причем центральное многообразие одной особой точки является устойчивым (или неустойчивым) многообразием другой (рис. 27 *a, б*). Если  $A$  принадлежит кривой 3, то одно из уравнений семейства (11<sub>A</sub>) имеет сложный цикл с че-

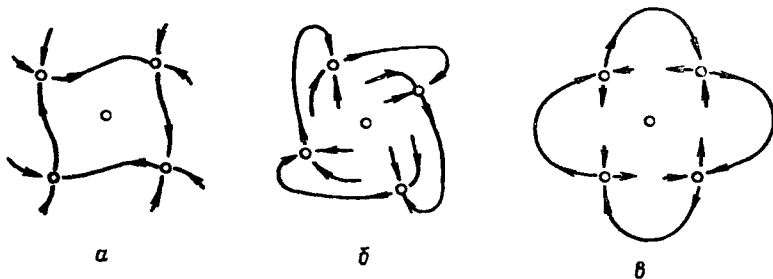


Рис. 27. Вырождения, соответствующие:  
*a* — кривой 1, *б* — кривой 2, *в* — кривой 3



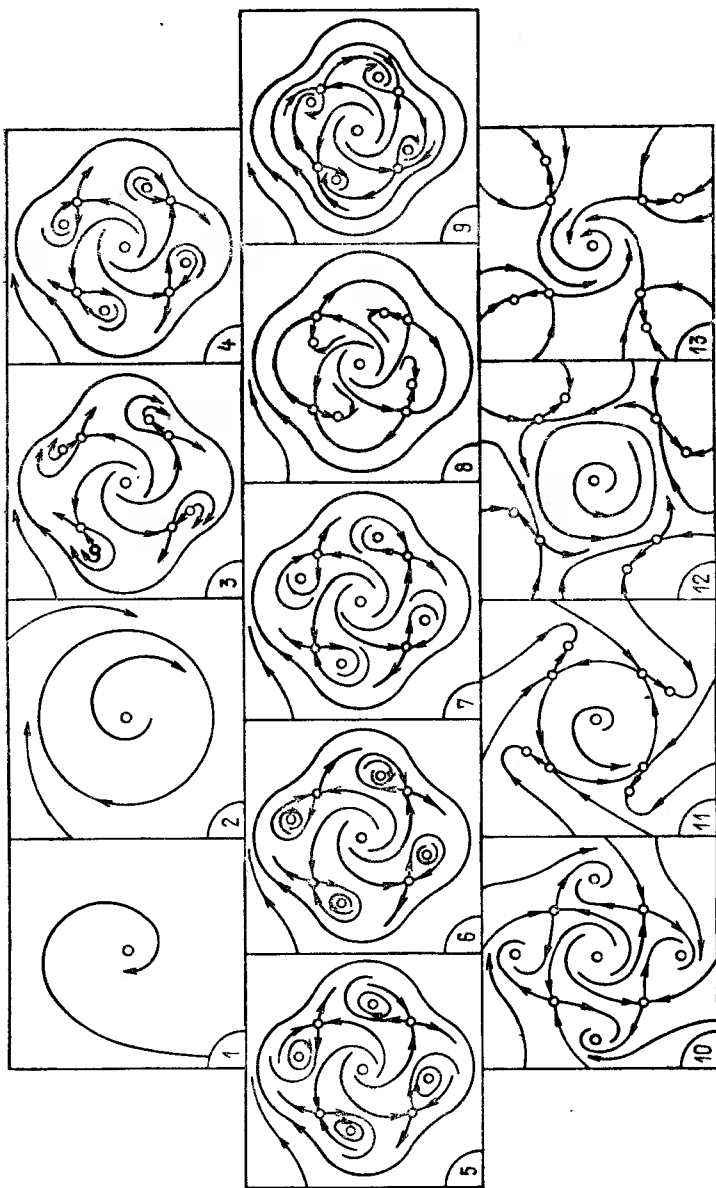


Рис. 28. Последовательность перестроек, заведомо происходящих в главном  $Z_4$ -эквивариантном семействе, соответствующем значению параметра  $A$  из некоторой подобласти области VIII

тырьмя особыми точками типа седло (рис. 27*в*), и главный член преобразования монодромии этого цикла линеен (преобразование монодромии определено на внешней полутрансверсали).

**4.4. Бифуркации в невырожденных семействах.** Связные компоненты, на которые линии вырожденных значений  $A$  делят третий квадрант, занумерованы на рис. 26. На рис. 28 показана последовательность бифуркаций в семействе  $(11_A)$ , если  $A$  принадлежит области VIII. Последовательность заведомо происходящих перестроек для остальных областей указана в [20], [41].

В областях, номера которых отличаются только буквой  $a$ , последовательность перестроек, по-видимому, одна и та же, за единственным исключением: в семействах  $(11_A)$ , соответствующих одной из двух таких областей, сначала исчезают ненулевые особые точки, а затем предельный цикл, обходящий 0, исчезает в нуле; в семействах, соответствующих другой области, эти события происходят в обратном порядке. Линии 1, 2, 3 и связанные с ними вырождения были предсказаны в [20], [21] и исследованы в [41], [42].

**4.5. Предельные циклы систем с симметрией четвертого порядка.** Предельные циклы систем  $(11_A)$ , близких к гамильтоновым, исследованы в [88]. А именно, доказано, что существует окрестность  $U$  мнимой оси с выколотыми точками  $A = \pm i$  (заштрихована на рис. 26), обладающая следующим свойством. Для каждой точки  $A$  из этой окрестности уравнения семейства  $(11_A)$  имеют не более двух предельных циклов; случаи 0, 1 и 2 циклов реализуются.

**З а м е ч а н и е.** Неизвестно:

1. Есть ли еще вырожденные значения  $A$ , кроме указанных выше?

2. Не происходит ли в невырожденных семействах  $(11_A)$  других перестроек, кроме описанных в [20], [21]?

3. Сколько предельных циклов может иметь уравнение (10)?

## § 5. Конечноголадкие нормальные формы локальных семейств

Семейство дифференциальных уравнений приводится к нормальной форме аналитическим или бесконечногладким преобразованием лишь в исключительно редких случаях. Полезную информацию можно часто извлечь и из конечногладкого приведения. Например,  $C^1$ -гладкое приведение позволяет следить за направлениями инвариантных многообразий и т. д. Конечногладкие нормальные формы семейств используются при нормализации уравнений быстрых движений в теории релаксацион-

ных колебаний (п. 2.1, гл. 4) и при исследовании нелокальных бифуркаций (гл. 3).

**5.1. Обзор результатов.** Интегрируемые конечно гладкие нормальные формы удается получить для деформаций ростков векторных полей в гиперболической неподвижной точке или ростков векторных полей на гиперболическом цикле, в предположении, что линеаризация соответствующих ростков нерезонансна или имеет однократный резонанс. Удастся также написать конечно гладкую версальную деформацию ростка векторного поля с одним нулевым собственным значением в особой точке.

На этом положительные результаты, в значительной мере, исчерпываются. Уже деформация ростка отображения

$$x \mapsto x + x^2 + \dots$$

имеет функциональный инвариант даже относительно  $C^1$ -гладкой классификации: две деформации с разными функциональными инвариантами не являются  $C^1$ -гладко эквивалентными. Аналогично обстоит дело с деформациями других негиперболических ростков диффеоморфизмов или векторных полей на циклах, встречающихся в однопараметрических семействах общего положения. Функциональные инварианты имеет также  $C^1$ -гладкая классификация деформаций ростков векторных полей в особой точке с парой чисто мнимых собственных значений.

Общие теоремы о конечногладких нормальных формах, не обязательно интегрируемых, содержатся в п. 5.3.

## 5.2. Определения и примеры.

**Определение 1.** Деформация ростка векторного поля в особой точке называется  $C^h$ -гладко (орбитально) версальной, если любая деформация этого ростка  $C^h$ -гладко (орбитально) эквивалентна индуцированной из исходной.

**Определение 2.** Деформация ростка векторного поля в особой точке называется конечногладко (орбитально) версальной, если для любого  $k$  у нее существует представитель, являющийся  $C^k$ -гладко (орбитально) версальной деформацией этого ростка.

Аналогично определяется конечногладко (орбитально) версальная деформация ростка векторного поля на цикле и диффеоморфизма в неподвижной точке.

Замечание. Конечногладкая версальная деформация является «сколь угодно гладкой», но не «бесконечногладкой». Дело в том, что чем выше гладкость диффеоморфизма, сопрягающего произвольную деформацию и индуцированную из версальной, тем меньше, вообще говоря, область изменения параметров. Аналогично обстоит дело с гладкостью центрального многообразия: для гладкого векторного поля оно сколь угодно гладко, но не бесконечногладко: чем выше требования гладкости, тем меньшая окрестность особой точки на центральном многообразии этой гладкостью обладает.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= 0, \\ \dot{x} &= x^2 - \varepsilon, \\ \dot{y} &= -y + f(x, y)(x^2 - \varepsilon).\end{aligned}\quad (12)$$

Центральное многообразие этой системы двумерно; исследуем его пересечения с плоскостями  $\varepsilon = \text{const}$ . Система (12) получается добавлением уравнения  $\dot{\varepsilon} = 0$  к семейству из последних двух уравнений. При  $\varepsilon > 0$  уравнение этого семейства имеет две особые точки: седло  $S_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}, 0)$  и узел  $N_\varepsilon(-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ , отношение  $\alpha$  собственных значений которого равно  $1/2\sqrt{\varepsilon}$ . Пересечение центрального многообразия системы (12) с плоскостью  $\varepsilon = \text{const}$  содержит (гладкую) сепаратрису седла  $S_\varepsilon$  и фазовую кривую, входящую в узел  $N_\varepsilon$ . Через узел  $N_\varepsilon$  проходят (при нецелом  $\alpha$ ) ровно две гладкие инвариантные кривые соответствующего уравнения; остальные фазовые кривые входят в узел, имея в точке  $-\sqrt{\varepsilon}$  лишь конечное число односторонних производных (оно равно  $[\alpha]$  — целой части  $\alpha$ ). Поэтому, выбрав функцию  $f$  так, чтобы в системе (12) «развести» сепаратрису седла и гладкое инвариантное многообразие узла, получим, что центральное многообразие системы (12) негладко. Гладкость его части, заключенной в полосе  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , не превосходит  $1/2\sqrt{\varepsilon_0}$  и стремится к бесконечности при  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ .

Пример 2. Рассмотрим деформацию ростка векторного поля в особой точке типа седло на плоскости, заданную как одно уравнение:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\varepsilon)x + \dots, \\ \dot{\varepsilon} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.\end{aligned}\quad (13)$$

Если отношение  $\alpha$  собственных значений оператора  $A(0)$  отрицательно и иррационально, то формальная нормальная форма этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\varepsilon)x, \\ \dot{\varepsilon} &= 0.\end{aligned}$$

Однако поскольку собственные значения оператора  $A(0)$  разных знаков (особая точка 0 — седло), отношение собственных чисел оператора  $A(\varepsilon)$  принимает рациональные значения на любом интервале изменения параметров (если деформация типична). Поэтому существуют сколь угодно малые значения  $\varepsilon$ , для которых формальная нормальная форма уравнения

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + \dots$$

содержит нелинейные (резонансные) члены. Следовательно, замены класса  $C^\infty$ , превращающей исходное семейство в семейство

линейных уравнений, не существует. Однако чем меньше база семейства, тем выше порядок резонансов, имеющих у уравнения семейства. Резонанс высокого порядка не препятствует  $C^h$ -гладкой эквивалентности уравнения своей линейной части, если порядок резонанса достаточно велик по сравнению с  $k$  (Стернберг [159: 3—5]). Локальное семейство (13) при иррациональном  $\alpha$  конечногладко эквивалентно линейному. Поэтому отношение конечногладкой эквивалентности вполне естественно при изучении нормальных форм локальных семейств.

### 5.3 Общие теоремы и деформации нерезонансных ростков.

**Теорема 1** (Г. Р. Белицкий [38], [39]). Гладкий росток диффеоморфизма в гиперболической неподвижной точке имеет  $C^h$ -гладко версальную конечнопараметрическую деформацию для любого  $k$ . Эта деформация  $C^h$ -гладко эквивалентна полиномиальной. Если мультипликаторы роста образуют мультипликативно нерезонансный набор  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ :

$$\lambda_j \neq \lambda^s$$

при любых  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $|s| \stackrel{\text{def}}{=} s_1 + \dots + s_n \geq 2$ , то версальная деформация роста эквивалентна линейной

$$x \mapsto A(\varepsilon)x.$$

Аналог справедлив для дифференциальных уравнений.

**З а м е ч а н и я.** 1. Семейство  $\{A(\varepsilon)\}$  является версальной деформацией оператора  $A(0)$ ; также деформации найдены в [19].

2. В приложениях часто используются замены невысокого класса гладкости; поэтому ниже выделяются требования на росток, позволяющие оценить класс гладкости замен, нормализующих его деформацию. Следующая теорема справедлива для деформаций любых, а не только гиперболических ростков.

Рассмотрим росток диффеоморфизма в неподвижной точке

$$(x, y) \mapsto (x', y'), \quad x' = A^c x + \dots, \quad y' = A^h y + \dots$$

( $c$  — от centre,  $h$  — от hyperbolic); все собственные значения оператора  $A^c$  лежат на единичной окружности, а оператора  $A^h$  — вне ее. Переменные  $y = (y_1, \dots, y_h)$  называются *гиперболическими*, а собственные значения оператора  $A^h$  — *мультипликаторами, соответствующими гиперболическим переменным*.

**Теорема 2а** (Такенс [202]). Рассмотрим росток диффеоморфизма в неподвижной точке, для которого модули мультипликаторов, соответствующих гиперболическим переменным, образуют нерезонансный набор. Тогда для любого  $k$  существует представитель ростака,  $C^h$ -эквивалентный следующему

$$f : (x, y) \mapsto (f_0(x), A(x)y), \quad (14)$$

здесь  $y = (y_1, \dots, y_h)$  — набор гиперболических переменных,  $y = 0$

— центральное многообразие,  $x$  — карта на центральном многообразии,  $f_0$  — росток диффеоморфизма, все мультипликаторы которого по модулю равны единице.

Эта теорема может быть усилена. Для каждого  $k$  определим «запрещенный порядок резонанса»  $N(k)$  следующим образом: пусть  $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_s| < 1 < |\lambda_{s+1}| \leq \dots \leq |\lambda_h|$ . Положим:

$$\beta(k) = \left[ \frac{\ln |\lambda_1| - k \ln |\lambda_h|}{\ln |\lambda_s|} + k \right] + 1;$$

$$N(k) = \left[ \frac{\ln |\lambda_h| - \beta(k) \ln |\lambda_1|}{\ln |\lambda_{s+1}|} + \beta(k) \right] + 1.$$

**Теорема 26 ([202]).** Рассмотрим росток диффеоморфизма в неподвижной точке, для которого модули мультипликаторов, соответствующих гиперболическим переменным, не подчинены резонансным соотношениям порядка  $N(k)$  и ниже, то есть

$$|\lambda_j| \neq |\lambda|^s$$

при  $|s| \leq N(k)$ . Тогда диффеоморфизм  $C^k$ -гладко эквивалентен диффеоморфизму (14). Аналоги теорем 2а и 2б справедливы для дифференциальных уравнений.

В частности, рассмотрим росток векторного поля в особой точке, для которого вещественные части собственных значений, соответствующих гиперболическим переменным, образуют нерезонансный набор. Для любого  $k$  существует представитель роста,  $C^k$ -гладко эквивалентный следующему:

$$\dot{x} = \omega(x),$$

$$\dot{y} = A(x)y,$$

где  $y$  — набор гиперболических переменных,  $x$  — карта на центральном многообразии. ▲

Эти результаты могут быть названы «теоремами о конечно-гладкой надстройке седла» и являются конечно гладким аналогом принципа сведения [20], [26]. Они обладают меньшей общностью: на мультипликаторы (или собственные значения особой точки) налагаются арифметические требования, которых нет в теореме сведения. Перейдем к деформациям гиперболических резонансных ростков.

**Определение.** *Центральным многообразием* локального семейства уравнений в точке  $(0, 0)$  называется центральное многообразие соответствующего семейству  $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$  уравнения  $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Аналогично определяется центральное многообразие локального семейства диффеоморфизмов или периодических дифференциальных уравнений.

**Теорема 3. а)** Рассмотрим семейство векторных полей в особой точке (ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке, периодических векторных полей на цикле). Для каждого нату-

рального  $k$  существует такое  $N(k) = N$ , что все представители  $N$ -струи семейства на его центральном многообразии  $C^h$ -эквивалентны.

б) Пусть  $\alpha = \max_{j=1, \dots, h} |\lambda_j| / \min |\lambda_j|$ . Тогда можно взять  $N(k)$  в виде  $N(k) = 2[2(k+1)\alpha] + 2$ , где  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

**З а м е ч а н и е.** Подчеркнем, что все упомянутые в теореме представители — это ростки семейств с общим центральным многообразием,  $N$ -струи которых во всех точках центрального многообразия совпадают.

Теорема 3а для ростков диффеоморфизмов легко следует из общей теоремы Белицкого (в которой дана несколько более слабая оценка сверху на  $N(k)$  [38, теорема 2.3.2]).

Теорема 3б доказана В. С. Самоволом [97], получившим также независимое доказательство теоремы 3а. Эти результаты применяются ниже к типичным однопараметрическим деформациям гиперболических ростков; для этих деформаций удается выписать интегрируемые нормальные формы.

**5.4. Приведение к линейной нормальной форме.** Из предыдущей теоремы немедленно получается

**С л е д с т в и е.** Пусть  $k$ -произвольное натуральное число. Если собственные значения особой точки гиперболического ростка векторного поля не удовлетворяют резонансному соотношению порядка  $N(k)$  или ниже, то версальная деформация ростка  $C^h$ -гладко эквивалентна версальной деформации его линейной части. Другими словами, любая деформация ростка  $C^h$ -гладкой заменой превращается в семейство линейных векторных полей.

Заметим, что величина  $N(k)$  зависит от числа  $a$ , измеряющего разброс вещественных частей собственных значений особой точки. Следующая теорема требует отсутствия лишь некоторых резонансов порядка 2.

**Т е о р е м а** (Е. П. Гомозов [64]). Пусть мультипликаторы гиперболического ростка диффеоморфизма в неподвижной точке не удовлетворяют ни одному из соотношений вида

$$|\lambda_i| = |\lambda_j| \cdot |\lambda_k| \text{ при } |\lambda_j| < 1 < |\lambda_k|.$$

Тогда любая гладкая деформация этого ростка  $C^1$ -эквивалентна своей линеаризации.

**5.5. Деформации ростков диффеоморфизмов типа Пуанкаре.** Напомним, что росток диффеоморфизма в неподвижной точке — типа Пуанкаре, если его мультипликаторы лежат по одну сторону от единичной окружности (либо все вне окружности, либо все внутри).

**Т е о р е м а** (Н. Н. Брушлинская [47]). Версальная деформация ростка диффеоморфизма типа Пуанкаре в неподвижной точке эквивалентна полиномиальному семейству диффеоморфиз-

мов, зависящему от  $d+m$  параметров. Здесь  $d$  — число параметров версальной деформации линейной части исходного ростка, а  $m$  — число резонансных соотношений, которым удовлетворяет набор его мультипликаторов. Если деформация гладкая (аналитическая), то нормализующие замены также гладки (аналитичны).

Аналогичные теоремы справедливы для ростков векторных полей в особой точке и на цикле.

### 5.6. Деформации однорезонансных гиперболических ростков.

**Определение 1.** Набор  $\lambda \in \mathbb{C}^n$  называется *k-резонансным* (*мультипликативно k-резонансным, периодически k-резонансным*), если число образующих аддитивной группы, порожденной множеством векторов  $\{r \in \mathbb{Z}_+^n \mid (r, \lambda) = 0\}$  (соответственно, множеством  $\{r \in \mathbb{Z}_+^n \mid \lambda^r = 1\}$  или  $\{r \in \mathbb{Z}_+^n \mid (r, \lambda) \in 2\pi i \mathbb{Z}\}$ , равно  $k$ . При  $k=1$  *k-резонансный* набор называется однорезонансным. Линейное векторное поле со спектром  $\lambda$ , а также линейный диффеоморфизм или периодическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (t, x) \in S^1 \times \mathbb{R}^n, \quad S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

задаваемые оператором со спектром  $\lambda$ , называются *k-резонансными*, если набор  $\lambda$  — *k-резонансный*.

**Определение 2.** Если все резонансные соотношения для спектра линейной части векторного поля в особой точке (диффеоморфизма в неподвижной линейной части) являются следствиями одного соотношения.

$$(r, \lambda) = 0, \quad (15)$$

соответственно

$$\lambda^r = 1 \quad (16)$$

или

$$(r, \lambda) \doteq 2\pi i l = 0, \quad (17)$$

то поле (соответственно, диффеоморфизм или периодическое дифференциальное уравнение) называется *сильно однорезонансным*.

**Определение 3.** Пусть  $A$  — оператор линейной части сильно однорезонансного векторного поля в особой точке или диффеоморфизма в неподвижной точке, или периодического дифференциального уравнения с автономной линейной частью,  $\lambda$  — спектр  $A$ . Оператору  $A$  соответствует вещественный резонансный моном, определяемый следующим образом.

Пусть  $z_1, \dots, z_n$  — координаты в жордановом базисе оператора  $A$ , причем сопряженным собственным значениям соответствуют сопряженные на  $\mathbb{R}^n$  наборы координатных функций. *Резонансным мономом*, соответствующим оператору  $A$ , назовем



в первых двух случаях выражение  $\operatorname{Re} z^r$ , а в третьем  $\operatorname{Re}(z^r \cdot e^{2\pi i n t})$ . Будем говорить, что первый из этих мономеров соответствует соотношению (15) или (16), а второй — соотношению (17).

Определение 4. а) Главным семейством ростков сильно однорезонансных векторных полей в особой точке называется семейство

$$\omega(x, \varepsilon) = Xg(u, \varepsilon), \quad X = \operatorname{diag} x, \quad (18)$$

где  $u$  — соответствующий (15) резонансный моном,  $g$  — векторный полином по  $u$ , коэффициенты которого являются параметрами семейства; их набор обозначается  $\varepsilon$ .

б) Главным семейством ростков сильно однорезонансных диффеоморфизмов в неподвижной точке называется семейство

$$f(x, \varepsilon) = g_w^1(x, \varepsilon),$$

где  $\omega$  — семейство полей из определения а),  $g^1$  — сдвиг за единичное время по фазовым кривым поля,  $u$  — соответствующий (16) резонансный моном.

в) Главным семейством ростков сильно однорезонансных периодических векторных полей на цикле называется семейство (18), в котором  $u$  — резонансный моном, соответствующий соотношению (17).

**Теорема.** Пусть  $v$  — гиперболический сильно однорезонансный росток векторного поля в особой точке. Тогда

а) Для каждого натурального  $k$  любая гладкая деформация ростка  $v$   $C^k$ -гладко эквивалентна индуцированной из главного семейства (18), в котором  $g$  — векторный полином степени  $N(k)$ ;  $N(k)$  — то же, что в теореме 3.

б) Если росток  $v$  не принадлежит исключительному подмножеству коразмерности бесконечность, то любая гладкая деформация этого ростка конечногладко эквивалентна индуцированной из главного семейства (18); степень полинома  $g$  в этом семействе зависит от деформируемого ростка и не зависит от класса гладкости сопрягающего диффеоморфизма.

в) Исключительное подмножество в этой теореме — то же, что в теореме Ихикавы о формальной конечной определенности для векторных полей [26, п. 3.4, гл. 3].

Аналог теоремы а) верен для ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке и периодических векторных полей на цикле.

**Теорема.** В типичных гладких конечнопараметрических семействах векторных полей на плоскости встречаются только такие ростки седловых резонансных векторных полей (резонанс  $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$ ,  $p$  и  $q$  натуральны и взаимно просты), которые гладко орбитально эквивалентны ростку

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 \pm u^\mu + a_0 u^{2\mu}), \\ \dot{y} &= -y p/q. \end{aligned}$$

Типичная деформация такого ростка конечногладко эквивалентна деформации, индуцированной из главной:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 \mp P_{\mu-1}(u, \varepsilon) \pm u^\mu + au^{2\mu}), \\ \dot{y} &= -yp/q,\end{aligned}$$

и конечногладко орбитально версальна. Здесь  $u = x^p y^q$  — резонансный моном,  $(\varepsilon, a) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu, a) \in \mathbb{R}^{\mu+1}$  — многомерный параметр семейства,

$$P_{\mu-1}(u, \varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 u + \dots + \varepsilon_\mu u^{\mu-1}. \quad (19)$$

**З а м е ч а н и е.** Теорема о формальной конечной определенности для ростков диффеоморфизмов, аналогичная теореме Ихикавы, доказана недавно М. Б. Житомирским; отсюда легко следуют аналогичные результаты и для периодических векторных полей. Вероятно, аналог теоремы б) также справедлив для обоих этих случаев.

Перейдем к исследованию деформаций негиперболических ростков.

**5.7. Деформации ростков векторных полей с одним нулевым собственным значением в особой точке.**

**О п р е д е л е н и е.** Главной  $(\nu+1)$ -параметрической деформацией ростка векторного поля на прямой называется семейство ростков, задающих уравнения

$$\dot{x} = \pm x^{\nu+1} + P_{\nu-1}(x, \varepsilon) + ax^{2\nu+1}. \quad (20)$$

Здесь  $P_{\nu-1}(x, \varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_\nu x^{\nu-1}$ ; деформируемый росток соответствует значению параметра  $\varepsilon = 0$ ,  $a = a_0 \in \mathbb{R}$ .

**З а м е ч а н и е.**  $\nu$ -параметрические главные семейства параметризуются одним дискретным (равным плюс или минус единице) и одним непрерывным параметром (равным  $a_0$ ). Различные главные семейства не являются конечногладко эквивалентными, если сопрягающий диффеоморфизм сохраняет ориентацию.

**Т е о р е м а.** Типичное  $\mu$ -параметрическое семейство векторных полей на прямой в окрестности каждой вырожденной особой точки заменой переменных и параметров приводится к одному из главных семейств (20) при  $\nu+1 \leq \mu$  или к семейству

$$\dot{x} = \pm x^{\mu+1} + P_{\mu-1}(x, \varepsilon) + a(\varepsilon) x^{2\mu+1}. \quad (21)$$

Соответствующая замена — аналитическая, гладкая или конечногладкая, если исходное семейство аналитично, гладко или конечногладко. Точнее, для любого натурального  $k$  существует такое  $N(k)$ , что если исходное семейство — класса  $C^{N(k)}$ , то нормализующая замена — класса  $k$ .

Эта теорема для аналитического и (бесконечно) гладкого случая доказана В. П. Костовым, а для конечно гладкого —

Ю. С. Ильяшенко и С. Ю. Яковенко (1985). Доказательство в аналитическом случае опубликовано в [77].

Из утверждения о конечногладкой нормализации и теоремы о конечногладкой надстройке седла для дифференциальных уравнений (п. 5.3) вытекает

**С л е д с т в и е.** Пусть  $v$  — росток гладкого векторного поля в особой точке с собственным значением 0 и одномерным центральным многообразием. Пусть кратность этой особой точки равна  $\mu + 1$ , и вещественные части ее ненулевых собственных значений образует нерезонансный набор. Росток с такими свойствами встречается в типичном семействе, зависящем не менее чем от  $\mu$  параметров. Деформация такого ростка в типичном гладком  $(\mu + 1)$ -параметрическом семействе конечногладко эквивалентна главной

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \pm x^{\mu+1} + P_{\mu-1}(x, \varepsilon) + ax^{\mu+1}, \\ \dot{y} &= A(x, \varepsilon)y.\end{aligned}$$

Деформируемому ростку соответствует  $\varepsilon = 0$ ,  $a = a_0$ , где  $a_0$  — некоторая вещественная константа.

**З а м е ч а н и я.** 1. Главная деформация зависит от  $(\mu + 1)$ -мерного параметра  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu, a)$  и функционального параметра  $A$ .

2. Следствие становится неверным, если в его заключении конечногладкую эквивалентность заменить аналитической или бесконечногладкой.

Это следствие позволяет нормализовать уравнение быстрых движений близ типичной точки складки медленной поверхности (§ 2, гл. 4).

**5.8. Функциональные инварианты диффеоморфизмов прямой.** Функциональные инварианты возникают в  $C^1$ -классификации отображений прямой, имеющих более одной гиперболической неподвижной точки (Г. Р. Белицкий и др.). Рассмотрим диффеоморфизм интервала, имеющий две гиперболические неподвижные точки — притягивающую и отталкивающую. В окрестности каждой из этих точек диффеоморфизм единственным образом включается в гладкий поток.

Другими словами, росток диффеоморфизма в неподвижной точке является ростком преобразования фазового потока за время 1 единственного  $C^1$ -гладкого векторного поля. Оба возникающие вблизи неподвижных точек поля разносятся диффеоморфизмом на весь интервал между особыми точками. Факторпространство этого интервала по действию диффеоморфизма диффеоморфно окружности. На этой окружности возникают два векторных поля без особых точек, для которых окружность — цикл с периодом 1. Поэтому на окружности возникают две карты, определенные однозначно с точностью до сдвига: времена движения, соответствующие каждому из полей. Функция пе-

перехода от одной карты к другой порождает функциональный модуль исходного диффеоморфизма. А именно, эта функция перехода — диффеоморфизм окружности:  $t \mapsto t + \Phi(t)$ .

Сдвиги в образе и в прообразе переводят этот диффеоморфизм в следующий:

$$t \mapsto t + \psi(t), \quad \psi(t) = \Phi(t + a) + b - a;$$

здесь  $a$  и  $b$  — некоторые константы. Выбирая подходящие  $a$  и  $b$ , можно добиться равенства  $\bar{\Psi} \equiv \int_{S^1} \Psi = 0$ . Функциональным модулем

классификации диффеоморфизмов интервала с двумя гиперболическими неподвижными точками является класс эквивалентных диффеоморфизмов окружности вида  $t \mapsto t + \Phi(t)$ ,  $\bar{\Phi} = 0$ . Отношение эквивалентности:  $\Phi \approx \psi \Leftrightarrow \Phi(t + a) = \psi(t)$  для некоторого  $a$ .

**5.9. Функциональные инварианты локальных семейств диффеоморфизмов.** Рассмотрим локальное семейство диффеоморфизмов прямой

$$(f; 0, 0); f(x, \varepsilon) = f_\varepsilon(x): x \mapsto x - \varepsilon + ax^2 + \dots, \quad a \neq 0. \quad (22)$$

При  $\varepsilon > 0$  отображение  $f_\varepsilon$  имеет две гиперболические неподвижные точки. Как показано в п. 5.8, конечногладкая классификация таких отображений имеет функциональный модуль — диффеоморфизм окружности в себя. Локальному семейству (22) соответствует класс эквивалентности ростков по  $\varepsilon$  в нуле семейств диффеоморфизмов окружности

$$\Phi(f) = \{\Phi_\varepsilon: S^1 \rightarrow S^1\}, \quad \Phi_\varepsilon = \text{id} + \varphi_\varepsilon, \quad \bar{\varphi}_\varepsilon = 0; \quad \varepsilon > 0, \quad (23)$$

$$\varepsilon^{k-1} \varphi_\varepsilon^{(k-1)} \xrightarrow{\rightarrow} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (23a)$$

при  $\varepsilon \leq 0$  по определению полагаем  $\Phi_\varepsilon = \text{id}$  ( $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ ).

Из  $C^k$ -гладкости локального семейства  $f$  следует, что соответствующее семейство  $\Phi$   $C^k$ -гладко.

Два семейства  $\Phi$  и  $\Psi$  вида (23) эквивалентны, если существует функция  $a$  класса  $C^k$  такая, что

$$\varphi_\varepsilon(t + a(\varepsilon)) = \psi_\varepsilon(t), \quad (24)$$

где  $a$  —  $C^k$ -гладкая функция, и  $a \equiv 0$  при  $\varepsilon \leq 0$ .

Теорема (С. Ю. Яковенко, 1985). 1.  $C^k$ -гладкому локальному семейству (22) соответствует класс ростков в нуле по  $\varepsilon$  гладких эквивалентных семейств диффеоморфизмов окружности (23), удовлетворяющих ограничению (23a) с отношением эквивалентности (24). 2. Каждый такой класс реализуется, как функциональный инвариант некоторого локального семейства (22). 3. Если функциональные инварианты и мультипликаторы

неподвижных точек, рассматриваемые как функции параметра, для двух  $C^h$ -гладких семейств совпадают, то семейства  $C^1$  гладко эквивалентны при  $k \geq 8$ .

**5.10. Функциональные инварианты семейств векторных полей.**  $C^1$ -гладкая классификация деформаций ростков векторных полей в особой точке с парой чисто мнимых собственных значений также имеет функциональные инварианты. Ограничим семейство на его центральное многообразие. Получим (конечно гладкую) деформацию ростка векторного поля с линейной частью типа центр на плоскости. Преобразование монодромии, соответствующее продеформированному ростку, имеет две гиперболические неподвижные точки (для тех значений параметра, которым соответствует цикл продеформированного уравнения): одна точка — особая, другая принадлежит циклу. Функциональный инвариант  $C^1$ -классификации таких преобразований построен выше.

Аналогично строится функциональный инвариант классификации типичных однопараметрических деформаций ростков диффеоморфизмов с мультипликатором  $-1$ .

**5.11. Функциональные инварианты топологической классификации локальных семейств диффеоморфизмов прямой (по Руссари).** Существует континуум топологически неэквивалентных трехпараметрических деформаций ростка диффеоморфизма  $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ,  $x \mapsto x + ax^4 + \dots$ .

**Теорема.** Типичной гладкой трехпараметрической деформации ростка диффеоморфизма прямой  $f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ,  $x \mapsto x + ax^4 + \dots$ ,  $a \neq 0$ , соответствует функциональный инвариант: однопараметрическое семейство классов эквивалентных диффеоморфизмов окружности; отношение эквивалентности такое же, как п. 5.8. Для  $\mu$ -параметрических деформаций ростка  $x \mapsto x + ax^{\mu+1} + \dots$ ,  $a \neq 0$ , функциональным инвариантом является  $(\mu-2)$ -параметрическое семейство классов эквивалентных диффеоморфизмов окружности ( $\mu \geq 3$ ).

Руссари не описывает множества всех семейств диффеоморфизмов окружности, возникающих как функциональные инварианты локальных семейств диффеоморфизмов прямой, однако указывает, что это множество континуально.

Приведем набросок доказательства теоремы. Пусть  $\{f_\varepsilon\}$  — типичная трехпараметрическая деформация ростка  $f$ . Неподвижные точки диффеоморфизмов  $f_\varepsilon$  сливаются, если и только если  $\varepsilon$  принадлежит поверхности, диффеоморфной ласточкиному хвосту. Будем считать, что соответствующий диффеоморфизм пространства параметров уже сделан; тогда поверхность слияния неподвижных точек будет ласточкиным хвостом. Точкам общего положения на ласточкином хвосте соответствуют диффеоморфизмы с одной двукратной неподвижной точкой; остальные неподвижные точки (если они есть), просты. Точкам на линии  $\Gamma$  самопересечения ласточкиного хвоста соответствуют диф-

феоморфизмы с двумя двукратными неподвижными точками. Линия  $\Gamma$  и будет базой семейства диффеоморфизмов окружности, которое является инвариантом деформации  $\{f_\varepsilon\}$ .

При  $\varepsilon \in \Gamma$  диффеоморфизму  $f_\varepsilon$  соответствует функциональный инвариант — класс эквивалентных диффеоморфизмов окружности на себя. А именно, росток диффеоморфизма  $f_\varepsilon$  в каждой из двух его полуустойчивых неподвижных точек порождается ростком векторного поля: росток диффеоморфизма является сдвигом за единичное время по фазовым кривым поля. Росток каждого из порождающих полей однозначно определен диффеоморфизмом  $f_\varepsilon$ . Оба поля разносятся с помощью  $f_\varepsilon$  на весь интервал между неподвижными точками диффеоморфизма, и на всем этом интервале порождают  $f_\varepsilon$ . Тем самым, построены два векторных поля на интервале, перестановочные с диффеоморфизмом интервала на себя без неподвижных точек. Такая пара полей порождает диффеоморфизм окружности на себя, определенный с точностью до сдвига в образе и в прообразе, как это описано в п. 5.8. Два диффеоморфизма окружности эквивалентны, если они имеют вид  $t \mapsto t + \varphi(t)$ ,  $t \mapsto t + \psi(t)$ , причем  $\varphi(t+a) = \psi(t) + b$  для некоторых  $a$  и  $b$ . Семейство таких классов эквивалентных диффеоморфизмов окружности, построенных для отображений  $f_\varepsilon$  при  $\varepsilon \in \Gamma$ , и образует функциональный инвариант деформации  $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (\mathbb{R}^3, 0)}$ .

Докажем теперь, что функциональные инварианты эквивалентных деформаций совпадают. Если два семейства эквивалентны, то поверхности (ласточкины хвосты) в базе, соответствующие диффеоморфизмам обоих семейств, имеющих негиперболические неподвижные точки, совпадают. Пусть  $f_\varepsilon$  и  $g_\varepsilon$  — диффеоморфизмы двух семейств, соответствующие значению параметра на линии самопересечения  $\Gamma$  ласточкиного хвоста. Существует богатое множество гомеоморфизмов, сопрягающих  $f_\varepsilon$  и  $g_\varepsilon$ ; большинство из них не переводит друг в друга соответствующие порождающие поля.

Пусть  $H$  — гомеоморфизм, сопрягающий семейства  $\{f_\varepsilon\}$  и  $\{g_\varepsilon\}$ . Из теоремы о жесткости (п. 1.1, гл. 2) следует, что гомеоморфизм  $H(\cdot, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \in \Gamma$  переводит порождающие поля диффеоморфизма  $f_\varepsilon$  в порождающие поля диффеоморфизма  $g_\varepsilon$ . Следовательно, функциональные инварианты диффеоморфизмов  $f_\varepsilon$  и  $g_\varepsilon$  совпадают. ►

**З а м е ч а н и я.** 1. Теорема о жесткости навязывает некоторую гладкость сопрягающему отображению, которое по определению было лишь гомеоморфизмом. Поэтому для отображений, осуществляющих лишь топологическую, а не гладкую эквивалентность семейств диффеоморфизмов, удалось провести те же построения, что и для гладких отображений в п. 5.9.

2. Теорема о жесткости существенным образом связана с непрерывной зависимостью сопрягающего гомеоморфизма от параметра. Поэтому слабая эквивалентность деформаций ростков

диффеоморфизмов прямой не порождает функциональных инвариантов (см. п. 2.2, гл. 2).

Следствия. 1. Топологическая классификация трехпараметрических деформаций векторных полей с четырехкратным предельным циклом (вырождение коразмерности три) имеет функциональные модули.

Чтобы в этом убедиться, нужно применить теорему Руссари к соответствующему семейству преобразований монодромии.

2. Топологическая классификация четырехпараметрических деформаций роста векторного поля на плоскости с двумя чисто мнимыми ненулевыми собственными значениями и дополнительным трехкратным вырождением линейной части (короче — роста класса  $B_4$ , см. п. 3.1, гл. 1) имеет функциональные модули.

Действительно, соответствующее семейство преобразований монодромии имеет двухпараметрическое подсемейство, состоящее из диффеоморфизмов с двумя двукратными неподвижными точками.

Поэтому при изучении многопараметрических деформаций векторных полей на плоскости целесообразно ослабить отношения эквивалентности до слабой эквивалентности.

## § 6. Универсальность Фейгенбаума для диффеоморфизмов и потоков

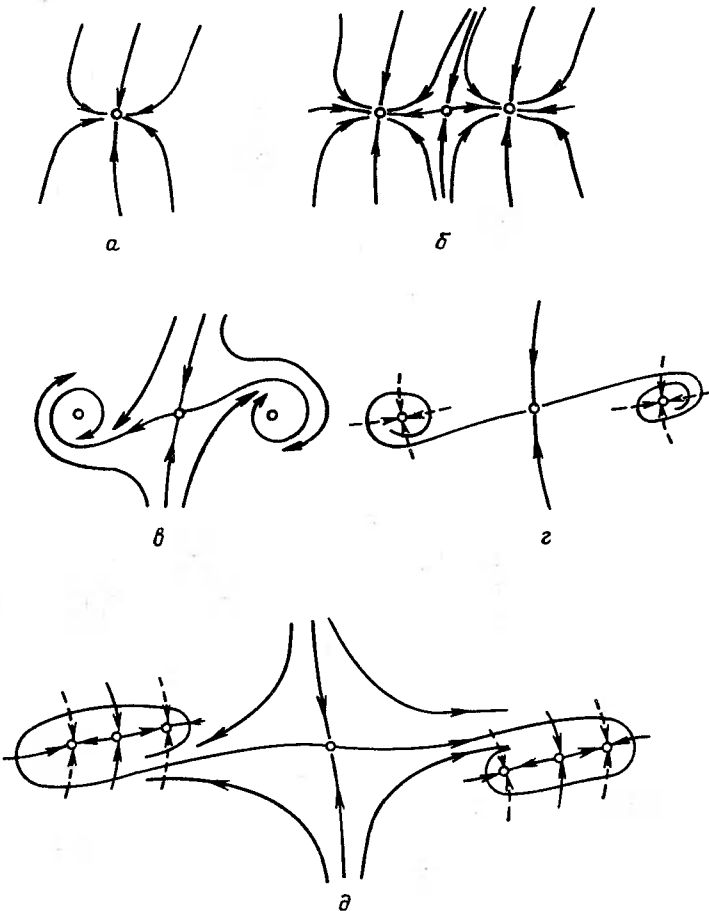
Одна из возможных бифуркаций аттрактора, часто реализующихся в системах, зависящих от параметра, — последовательность удвоений периода устойчивого цикла. Эта последовательность бифуркаций, происходящая на конечном интервале изменения параметра, приводит систему от устойчивого периодического режима к хаосу.

**6.1. Каскад удвоений.** Последовательность бифуркаций удвоения в однопараметрических семействах происходит следующим образом. Устойчивый первоначально цикл — аттрактор теряет устойчивость с прохождением мультипликатора через  $-1$ . В этот момент от него ответвляется, в типичном семействе системы, устойчивый цикл вдвое большего, в момент бифуркации, периода; он замыкается после двух обходов теряющего устойчивость цикла (п. 1.2). При дальнейшем изменении параметра новый цикл испытывает ту же бифуркацию удвоения, затем родившийся аттрактор, с примерно четырехкратным периодом, удваивается еще раз и т. д. Оказывается, весь этот каскад удвоений, в бесконечном количестве, происходит в типичном семействе на конечном отрезке изменения параметра. Более того, промежутки между последовательными удвоениями убывают асимптотически в геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии универсален — не зависит от рассматриваемого

семейства, то есть одинаков для всех типичных семейств, равен  $1/4,6692\dots$ ;  $4,6692\dots$  и называется *константой Фейгенбаума* [57].

**6.2. Перестройки неподвижных точек.** Аналогичные каскады удвоений наблюдаются в типичных семействах диффеоморфизмов: неподвижная точка, устойчивая при значениях параметра, меньших первого критического, теряет устойчивость при прохождении мультипликатора через  $-1$  с образованием устойчивого цикла периода 2, затем этот цикл теряет устойчивость с образованием устойчивого цикла периода 4 и т. д. Промежутки между последовательными бифуркациями убывают, как и для систем с непрерывным временем.

Линеаризация диффеоморфизма в неподвижной точке, теряющей устойчивость с прохождением мультипликатора через





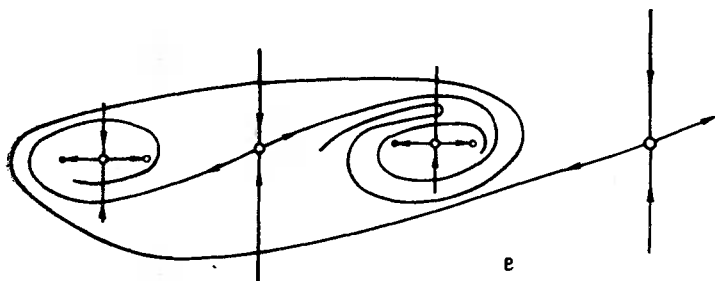


Рис. 29. Три последовательных бифуркации удвоения для диффеоморфизма плоскости. Бифуркации происходят при переходе от рис. *а* к рис. *б*, от *г* к *д* и от *д* к *е*. На рис. *в* и *г* показаны перестройки неподвижных точек квадрата диффеоморфизма. На рис. *г* сплошными линиями показаны инвариантные кривые диффеоморфизма, а пунктирными — инвариантные кривые его квадрата; на этих кривых диффеоморфизм действует как инволюция. На рис. *д* сплошными линиями показаны инвариантные кривые квадрата диффеоморфизма, а пунктирными — инвариантные кривые его четвертой степени. Кривые рис. *е* инвариантны относительно шестнадцатой степени диффеоморфизма. Неустойчивое многообразие каждой седловой неподвижной точки содержит в своем замыкании неустойчивые многообразия всех седловых неподвижных точек, рождающихся при последующих бифуркациях. На рис. *е* изображены лишь «центральная» и «левая» части множества неподвижных точек и инвариантных кривых шестнадцатой степени диффеоморфизма

—1, не может иметь вещественных собственных чисел при всех значениях параметра: в противном случае один из мультипликаторов неподвижной точки должен был бы пройти через нуль, и отображение не было бы диффеоморфизмом. Перестройки биквадрата диффеоморфизма плоскости при двух последовательных удвоениях показаны на рис. 29.

**6.3. Каскад  $n$ -кратных увеличений периода.** В двумерных параметрических системах встречаются столь же неустранимым образом каскады утроений, учетверений, упятерений и т. д. В этих случаях знаменатель геометрической прогрессии, определяющей последовательность бифуркационных значений параметров, — комплексное число, так что бифуркационные значения ложатся асимптотически на логарифмическую спираль (в подходящей евклидовой структуре плоскости параметров). Для утроений это число равно  $(4,600\dots + i8,981\dots)^{-1}$ . Вычисления показывают, что для каскада бифуркаций с прохождением пары мультипликаторов через резонанс  $\exp(\pm 2\pi i p/q)$  универсальный знаменатель приблизительно равен  $C(p, q)/q^2$ . Тем самым, с ростом кратности увеличения периода события разворачиваются быстрее [57 : 56, 57, 58].

**6.4. Удвоение в гамильтоновых системах.** В гамильтоновых системах также встречаются каскады удвоений, но выглядят они несколько иначе. В этом случае бифуркация удвоения состоит в том, что при изменении параметра эллиптическая пери-

одическая траектория становится гиперболической<sup>1)</sup>, но рядом с ней появляется эллиптическая периодическая траектория удвоенного периода (рис. 30). Универсальный знаменатель для удвоения в гамильтоновой системе равен  $1/8,72\dots$  [57: 54, 55].

Опишем теперь механизм возникновения каскада удвоений для диффеоморфизмов. Напомним некоторые результаты из одномерной теории [57], [135]:

**6.5. Оператор удвоения для одномерных отображений.** Рассмотрим отображение отрезка в себя, график которого имеет вид, изображенный на рис. 31а. График квадрата отображения изображен на рис. 31б. Обведенная часть этого графика, с точностью до растяжения и обращения осей, напоминает исходный график. Это наблюдение мотивирует

**Определение.** Отображение отрезка  $I = [-1, 1]$  в себя называется *автоквадратным*, если оно сопряжено с ограничением своего квадрата на меньший отрезок, причем сопрягающий диффеоморфизм линеен.

Последнего, вообще говоря, можно добиться выбором координаты на прямой.

**Теорема** (Лэнфорд [57: 29], Кампанино, Эпштейн [57: 30])<sup>2)</sup>. Существует четное аналитическое автоквадратное отображение  $g: I \rightarrow I$ , для которого

$$g(0) = 1, \quad g(1) < 0, \quad g'(x) > 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0),$$

$$g(g(\alpha^{-1})) < \alpha^{-1} < g(\alpha^{-1}), \quad (25)$$

где  $\alpha = -1/g(1)$ . В некоторой окрестности точки  $g$  в пространстве всех отображений отрезка нет других автоквадратных отображений, удовлетворяющих нормировочному требованию  $g(0) = 1$ .

Автоквадратное отображение является неподвижной точкой «оператора удвоения»

$$Tf = \beta \circ f \circ f \circ \beta^{-1}, \quad \beta = -\frac{1}{f(1)}.$$

Этот оператор определен для всех четных отображений, удовлетворяющих условиям (25), и для всех, не обязательно четных, отображений, близких к  $g$  и переводящих 0 в 1.

**З а м е ч а н и е.** Отображения  $Tf$  и  $f^2 = f \circ f$  сопряжены. По-

<sup>1)</sup> Эллиптическая периодическая траектория гамильтоновой системы — это цикл с незначительными мультипликаторами, по модулю равными единице; гиперболическая — с мультипликаторами, модуль которых не равен единице.

<sup>2)</sup> Подробное доказательство см.: К. И. Бабенко, В. Ю. Петрович, О доказательных вычислениях на ЭВМ. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. М., 1983, 183 с.

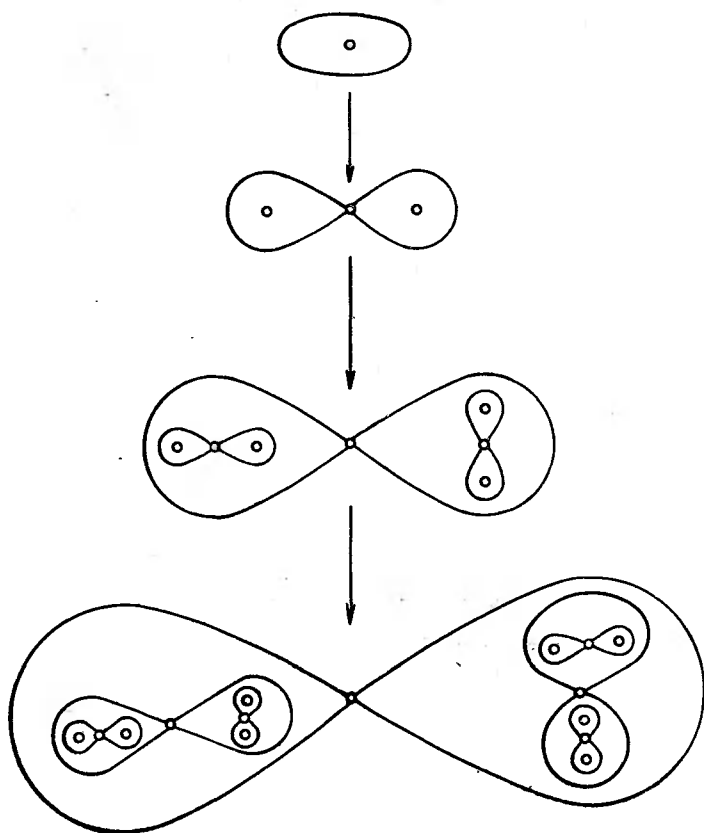


Рис. 30. Три последовательные бифуркации удвоения периода в типичном семействе отображений, сохраняющих площадь (гамильтонов случай)

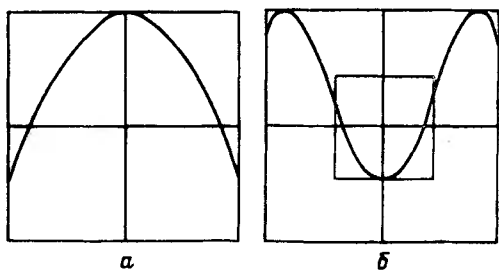


Рис. 31. Отображение отрезка, близкое к автоквадратному, и его квадрат

этому если  $Tf$  имеет цикл периода  $N$ , то  $f^2$  имеет цикл того же периода, а отображение  $f$  — цикл вдвое большего периода.

**6.6. Механизм универсального удвоения для диффеоморфизмов.** Рассмотрим двумерный случай. Пусть  $g$  — автоквадратное отображение из пункта 6.5. Рассмотрим отрезок  $I: x \in [-1, 1], y=0$  на плоскости и построим чрезвычайно вырожденное автоквадратное отображение окрестности отрезка  $I$  в себя. Положим:

$$\Phi(x) = g(\sqrt{x}).$$

Ввиду четности и аналитичности функции  $g$ , функция  $\Phi$  аналитична на отрезке  $[0, 1]$  и, следовательно, аналитически продолжается в некоторую окрестность его концов. Пусть  $D_r$  —  $r$ -окрестность отрезка  $I$  на плоскости  $(x, y)$  — объединение всех кругов радиуса  $r$  с центрами на  $I$ . При достаточно малом  $r$  определено отображение

$$G: (x, y) \mapsto (\Phi(x^2 - y), 0), \quad D_r \rightarrow D_r,$$

совпадающее с  $g$  на  $I$ . Положим:  $\alpha = -1/g(1) = 2,5029 \dots$ ,  $A: (x, y) \mapsto (-\alpha x, \alpha^2 y)$ . Рассмотрим оператор удвоения:

$$T: F \mapsto A \circ F \circ F \circ A^{-1}. \quad (26)$$

Если  $C$ -норма разности  $F - G$  не превосходит  $r/2$ , то отображение  $TF$  определено в  $D_r$ . Легко проверить, что отображение  $G$  является неподвижной точкой оператора  $T$  и в этом смысле автоквадратно.

**З а м е ч а н и е.** Отображение  $G$  можно приблизить семейством диффеоморфизмов

$$G_\varepsilon: G_0 = G, \quad G_\varepsilon(x, y) = (\Phi(x^2 - y), \varepsilon x).$$

Отображение  $G_\varepsilon: D_r \rightarrow \mathbb{R}^2$  — диффеоморфизм при достаточно малом  $r$  и всех достаточно малых  $\varepsilon \neq 0$ .

Рассмотрим окрестность автоквадратного отображения  $G$  в подходящем функциональном пространстве отображений области  $D_r$  в себя. Эта окрестность расслоена на орбиты действия группы аффинных замен переменных (точнее, разбита на классы аффинно эквивалентных отображений; допуская вольность речи, будем называть эти классы «орбитами», хотя они представляют лишь «куски» орбит). Орбита отображения  $G$ , как и близких к  $G$  отображений, — гладкое многообразие, размерность которого совпадает с размерностью аффинной группы пространства  $S^n$ . Поэтому окрестность отображения  $G$  факторизуется по действию аффинной группы; пусть  $\pi$  — проектирование этой окрестности на соответствующее факторпространство. Оператор удвоения переставляет орбиты действия аффинной группы; поэтому он опускается до оператора, действующего на факторпространстве. Точка  $\pi G$  является неподвижной для этого нового

оператора. Доказано [57 : 9], что эта неподвижная точка гиперболична и имеет одномерное неустойчивое многообразие  $W^u$  и устойчивое  $W^s$  коразмерности 1. В пространстве однопараметрических семейств диффеоморфизмов открытое множество образуют семейства, трансверсально пересекающие многообразие  $\pi^{-1}W^s$ , имеющее коразмерность 1 в пространстве всех отображений области  $D_r$  в себя. В таких семействах происходит счетное число бифуркаций удвоения периода; механизм этих бифуркаций объясняется гиперболическими свойствами оператора удвоения так же, как и в одномерном случае [48], [57].

Когда параметр семейства пробегает отрезок между соседними бифуркационными значениями, отвечающими удвоению периода, один из мультипликаторов соответствующего цикла меняется от значения 1 до значения  $-1$ , выходя по дороге в комплексную область. Интересно исследовать асимптотику кривой, пробегаемой этим мультипликатором на плоскости  $\mathbb{C}$ . В настоящее время оценен сверху радиус круга с центром 0, в котором лежит дуга не вещественных значений мультипликатора; этот радиус убывает, как повторная геометрическая прогрессия  $\exp(-\alpha 2^n)$ .

Пусть двумерная область  $D_r$ , оператор удвоения (26), его неподвижная точка  $G : D_r \rightarrow \mathbb{R}$  и его инвариантная гиперповерхность  $\pi^{-1}W^s$  — те же, что и выше.

**Теорема (М. В. Якобсон, 1985).** Существует окрестность отображения  $G$  в функциональном пространстве, обладающая следующим свойством. Пусть одномерное семейство диффеоморфизмов принадлежит этой окрестности и трансверсально пересекает гиперповерхность  $\pi^{-1}W^s$ . Тогда

1. Последовательность бифуркационных значений параметра, соответствующих выходу в комплексную область мультипликаторов цикла периода  $2^n$ , возникающего в каскаде удвоений, имеет вид  $\varepsilon_n = c\delta^{-n} + O(\delta^{-n}\sigma^n)$ , где  $\delta$  — константа Фейгенбаума,  $\sigma$  — максимальное сжимающее собственное значение линеаризации оператора удвоения в неподвижной точке  $G$ ,  $c$  — константа, зависящая от семейства.

2. Соответствующая последовательность дуг, пробегаемых не вещественным мультипликатором цикла периода  $2^n$ , лежит в круге радиуса  $\exp(-\alpha 2^n)$  с центром 0; здесь  $\alpha$  — положительная константа, зависящая от семейства. ▲

Ослабленное первое утверждение теоремы:  $\varepsilon_n = O(\delta^{-n})$  немедленно следует из теории универсальности Фейгенбаума. Доказательство первого утверждения в его полном объеме выходит за рамки настоящего обзора; наметим доказательство второго.

◀ Если мультипликатор  $\lambda_n(\varepsilon)$  неподвижной точки диффеоморфизма плоской области  $f_\varepsilon^{2^n}$  (он же — мультипликатор цикла диффеоморфизма  $f_\varepsilon$  с периодом  $2^n$ ) — не вещественный, то второй мультипликатор с ним комплексно сопряжен, и якобиан диффео-

морфизма в этой точке равен  $|\lambda_n(\varepsilon)|^2$ . С другой стороны, если диффеоморфизм  $f_\varepsilon$  достаточно близок к отображению  $G$ , образ которого одномерен, то якобиан  $f_\varepsilon$  всюду в области определения меньше некоторой константы  $\exp(-2\alpha) < 1$ . Тогда якобиан диффеоморфизма  $f_\varepsilon^{2^n}$  всюду в  $D_r$  меньше  $\exp(-2\alpha \cdot 2^n)$ . Отсюда

$$|\lambda_n(\varepsilon)| < \exp(-\alpha \cdot 2^n). \blacktriangleright$$

Теорема справедлива и для отображений областей любой размерности (а не только двумерных). Доказательство утверждения 2 использует тот факт, что все отображения, близкие к отображению на прямую, сжимают двумерные объемы.

### Глава 3

#### НЕЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ

В этой главе описаны бифуркации систем, принадлежащих границе множества систем Морса—Смейла. Напомним, что точка  $P$  называется *неблуждающей точкой* потока  $\{f^t\}$  (или диффеоморфизма  $f$ ), если для любой окрестности  $U \ni P$  существует последовательность  $t_i \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$  ( $k_i \in \mathbb{Z}$ ,  $k_i \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$ ) такая, что  $f^{t_i}U \cap U \neq \emptyset$  ( $f^{k_i}U \cap U \neq \emptyset$ ). Поток (или диффеоморфизм) компактного многообразия называется *системой Морса—Смейла*, если

1. Множество неблуждающих точек потока или диффеоморфизма состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий.

2. Все неподвижные точки и периодические траектории — гиперболические.

3. Устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек и циклов пересекаются трансверсально.

Границу множества систем Морса—Смейла можно разбить на следующие части:

1. Системы с конечным множеством неблуждающих траекторий, содержащие либо негиперболические неподвижные точки или циклы, либо траектории нетрансверсального пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий неподвижных точек или (и) циклов, либо и те, и другие одновременно.

2. Системы с бесконечным множеством неблуждающих траекторий.

Бифуркации, осуществляющиеся при переходе через первую часть границы, изучены сравнительно подробно и описаны в §§ 1—6. Вторая часть границы и соответствующие ей бифуркации почти не исследованы; совсем недавно доказана ее не-

пустота для систем с более чем двумерным фазовым пространством. Эти результаты изложены в § 7.

Некоторые бифуркации, описанные в этой главе, приводят к возникновению странных аттракторов. Существуют разные, не эквивалентные между собой определения аттракторов. На «физическом» уровне строгости аттрактор — это множество траекторий в фазовом пространстве, отвечающее «установившимся режимам». Обсуждение различных определений аттрактора и описание некоторых бифуркаций аттракторов содержится в § 8.

В §§ 5, 6 и др. приводятся сведения о бифуркациях в классе систем с нетривиальными неблуждающими множествами.

## § 1. Вырождения коразмерности 1. Сводка результатов

**1.1. Локальные и нелокальные бифуркации.** Обозначим через  $\chi^r(M)$  банахово пространство  $C^r$ -гладких векторных полей с  $C^r$ -топологией,  $r \geq 1$ , на  $C^\infty$ -гладком многообразии  $M$ , через  $\Sigma^r(M)$  — множество векторных полей, порождающих структурно устойчивые (или грубые<sup>1)</sup>) динамические системы.

**Определение.** Множество  $B^r(M) = \chi^r(M) \setminus \Sigma^r(M)$  называется *бифуркационным*.

Пусть  $v(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ , —  $k$ -параметрическое непрерывное семейство векторных полей.

**Определение.** Значения  $\varepsilon$ , для которых  $v(\varepsilon) \in B^r(M)$ , называются *бифуркационными*, а изменение топологической структуры разбиения фазового пространства на траектории динамической системы, порожденной векторным полем  $v(\varepsilon)$ , при переходе через бифуркационное значение  $\varepsilon$ , называется *бифуркацией*.

Аналогично определяются бифуркации для динамических систем с дискретным временем — диффеоморфизмов.

Очевидно, бифуркационное множество содержит векторные поля, имеющие негиперболические особые точки или негиперболические циклы, а также векторные поля, имеющие гиперболические особые точки и (или) циклы, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются нетрансверсально.

**Определение.** Фазовая кривая векторного поля называется *гомоклинической траекторией* особой точки (или цикла),

---

<sup>1)</sup> Напомним (см. [11], [166]), что первоначальное определение структурной устойчивости отличается от определения грубости отсутствием требования близости к тождественному гомеоморфизму, осуществляющего топологическую эквивалентность исходной и возмущенной систем. Открытость множества векторных полей, порождающих структурно устойчивые системы, следует непосредственно из определения, в отличие от грубых. С другой стороны, нам не известны примеры структурно устойчивых систем, не являющихся грубыми, поэтому в настоящее время «структурная устойчивость» часто используется как синоним «грубости», т. е. оба термина подразумевают близость сопрягающего гомеоморфизма к тождественному.

если она входит в эту точку (наматывается на цикл) как при  $t \rightarrow \infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ ; другими словами, если  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельные множества совпадают с особой точкой (циклом). Фазовая кривая называется *гетероклинической траекторией*, если ее  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельные множества являются различными особыми точками или циклами.

**О п р е д е л е н и е.** Бифуркации, осуществляющиеся в малой фиксированной окрестности положения равновесия (или цикла) и связанные с нарушением его гиперболичности, называются *локальными*. Бифуркации, осуществляющиеся в малой фиксированной окрестности конечного числа гомо- или (и) гетероклинических траекторий, называются *полулокальными*; все остальные (не локальные и не полулокальные) — *глобальными*.

Заметим, что эти определения относятся, в первую очередь, к постановке задачи: локальные бифуркации могут сопровождаться полулокальными, а полулокальные — глобальными.

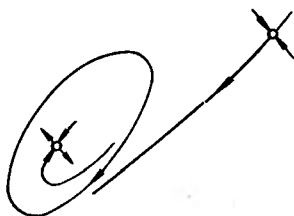


Рис. 32. Фазовые кривые векторного поля на плоскости, однопараметрическая деформация которого имеет счетное множество бифуркационных значений

**Пример.** Изображенная на рис. 32 система имеет при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  полуустойчивый предельный цикл, на который наматывается неустойчивая сепаратриса седла и с которого сматывается устойчивая сепаратриса другого седла. После исчезновения цикла, скажем, при  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , сепаратрисы этих седел замыкаются, когда параметр  $\varepsilon$  пробегает последовательность значений  $\varepsilon_i > \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_0$ . Локальная бифуркация здесь — слияние устойчивого и неустойчивого циклов в полуустойчивый при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  и его исчезновение при  $\varepsilon > \varepsilon_0$ . Она сопровождается счетным множеством полулокальных бифуркаций — замыкания сепаратрис при  $\varepsilon = \varepsilon_i$ .

Перечислим вырождения коразмерности 1, связанные с нарушением требований на системы Морса—Смейла.

**1.2. Негиперболические особые точки.** На границе множества систем Морса—Смейла встречаются системы с негиперболическими точками (циклами). Локальные бифуркации таких точек и циклов описаны в главах 1 и 2. Однако с негиперболичес-



кими точками и циклами связаны вырождения нелокального характера, которые приводят к полулокальным бифуркациям. Опишем гомоклинические траектории негиперболических особых точек.

**Определения.** *Устойчивым (неустойчивым) множеством* негиперболической особой точки векторного поля называется объединение всех положительных (отрицательных) полутраекторий поля, стремящихся к этой точке.

Аналогично определяются *устойчивое и неустойчивое множества* негиперболического цикла и негиперболической неподвижной точки диффеоморфизма.

**З а м е ч а н и е.** Суммарная размерность устойчивого и неустойчивого множества негиперболической особой точки с одномерным центральным многообразием равна  $n+1$  ( $n$  — размерность фазового пространства). Поэтому в классе векторных полей с такой особой точкой наличие гомоклинической траектории этой точки — явление общего положения.

Устойчивое, неустойчивое и центральное многообразие точки и цикла определены в [162] и обозначаются  $W^s$ ,  $W^u$  и  $W^c$  (или  $W^s_O$ ,  $W^u_O$ ,  $W^c_O$ ;  $W^s_L$ ,  $W^u_L$ ,  $W^c_L$ , где  $O$  и  $L$  — соответствующие точка и цикл). Устойчивое и неустойчивое множества точки и цикла обозначаются  $S^u$  и  $S^s$  (или  $S^s_O$ ,  $S^u_O$ ,  $S^s_L$ ,  $S^u_L$ , где  $O$  и  $L$  — соответствующие точка и цикл).

Если все не лежащие на мнимой оси собственные значения матрицы линейной части векторного поля в особой точке находятся в правой (левой) полуплоскости, то скажем, что особая точка — *неустойчивый (устойчивый) узел по гиперболическим переменным*. В противном случае особая точка называется *седлом по гиперболическим переменным*.

**Пример 1.** Рассмотрим негиперболическую особую точку  $O$  векторного поля с одномерным центральным многообразием, ограничение поля на которое имеет вид  $(ax^2 + \dots) \partial/\partial x$ ,  $a \neq 0$ . Если эта особая точка — узел по гиперболическим переменным, то росток в точке  $O$  одного из множеств  $S^s$ ,  $S^u$  диффеоморфен ростку луча в его вершине, а росток другого множества — ростку полупространства в граничной точке. Если особая точка  $O$  — седло по гиперболическим переменным, то ростки множеств  $S^s$  и  $S^u$  диффеоморфны росткам полупространства размерности выше единицы в граничной точке;  $\dim S^s = \dim W^s + 1$ ,  $\dim S^u = \dim W^u + 1$ .

**Пример 2.** Рассмотрим негиперболическую особую точку векторного поля с двумерным центральным многообразием и парой чисто мнимых собственных значений; ограничение поля на центральное многообразие имеет нормализованную 3-струю, задающую уравнение вида:

$$\dot{z} = i\omega z + az|z|^2, \quad \operatorname{Re} a \neq 0$$

(см. § 2, гл. 1). Пусть для определенности  $\operatorname{Re} a < 0$ . Тогда ростки множеств  $S^s$  и  $S^u$  — это ростки многообразий размерности  $\dim W^s + 2$  и  $\dim W^u$  соответственно; сумма этих размерностей равна  $n$ .

**Замечание.** В классе векторных полей, имеющих особую точку с парой чисто мнимых собственных значений, поля общего положения не имеют гомоклинической траектории особой точки.

**1.3. Негиперболические циклы.** Исследуем гомоклинические траектории негиперболических циклов. В однопараметрических семействах общего положения могут встречаться негиперболические циклы, имеющие один мультипликатор 1 или  $-1$  или пару не вещественных мультипликаторов  $e^{\pm i\theta}$ . Если остальные мультипликаторы лежат внутри (вне) единичной окружности, то будем говорить, что такой цикл — типа устойчивый (неустойчивый) *узел по гиперболическим переменным*. В противном случае цикл — типа *седло по гиперболическим переменным*. Аналогичные определения даются для неподвижной или периодической точки диффеоморфизма. Опишем устойчивые и неустойчивые множества негиперболических циклов, предполагая, что выполнены требования общности положения из § 1 главы 2.

**Пример 1.** Для векторного поля на  $\mathbb{R}^n$ , имеющего цикл  $L$  с мультипликатором  $\neq \pm 1$ , неподвижная точка преобразования монодромии трансверсали  $D$  в окрестности  $L$  обладает одномерным центральным многообразием, и ростки множеств  $S_L^s \cap D$ ,  $S_L^u \cap D$  в неподвижной точке такие же, как ростки  $S_0^s$ ,  $S_0^u$  векторного поля на  $\mathbb{R}^{n-1}$  в особой точке с одномерным центральным многообразием (см. пример 1, п. 1.2). Росток же множества  $S_L^s (S_L^u)$  на  $L$  диффеоморфен ростку на окружности  $\{0\} \times S^1$  прямого или косого произведения  $s$ -мерного ( $u$ -мерного) полупространства с нулем на границе на окружность  $S^1$ . Здесь  $s = \dim W_L^s$ ,  $u = \dim W_L^u$ . В частности, если  $L$  — устойчивый узел по гиперболическим переменным, то росток  $S_L^u$  на  $L$  диффеоморфен ростку на  $\{0\} \times S^1$  произведения луча с вершиной нуль на окружность  $S^1$ .

**Замечание.** Так как  $\dim S_L^s + \dim S_L^u = n + 2$ , то наличие гомоклинической траектории и даже однопараметрического семейства таких траекторий в классе векторных полей с негиперболическим циклом, имеющим мультипликатор  $\neq \pm 1$ , — явление общего положения.

**Пример 2.** Рассмотрим векторное поле на  $\mathbb{R}^n$ , имеющее цикл с мультипликатором  $(-1)$ . Неподвижная точка преобразования монодромии трансверсали, соответствующая циклу, обладает одномерным центральным многообразием, на котором преобразование монодромии может быть записано в виде:  $x \mapsto -x + ax^2 + bx^3 + \dots$ . Квадрат этого преобразования записы-

ваются как:  $x \mapsto x - 2(a^2 + b)x^3 + \dots$ , откуда ясно, что при  $a^2 + b > 0$  ( $< 0$ ) неподвижная точка на центральном многообразии устойчива (неустойчива). Это же верно и для цикла. Поэтому так как  $u + s = n$ ,  $s = \dim W^s$ ,  $u = \dim W^u$ , то при  $a^2 + b > 0$ ,  $\dim S^s = s + 1$ ,  $\dim S^u = u$ , а при  $a^2 + b < 0$ ,  $\dim S^s = s$ ,  $\dim S^u = u + 1$ . Следовательно, наличие изолированной гомоклинической траектории в классе векторных полей с таким циклом — явление общего положения при  $s \geq 2$ ,  $u \geq 2$ .

**Пример 3.** Предположим, что векторное поле на  $\mathbb{R}^n$  имеет цикл с парой не вещественных мультипликаторов  $e^{\pm i\varphi}$ ,  $\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\}$ . Преобразование монодромии имеет двумерное центральное многообразие, на котором (в координатах  $x + iy = z$ ) оно может быть записано в виде  $z \mapsto vz + az |z|^2 + \dots$ ,  $v = e^{i\varphi}$ . Отсюда несложно вывести, что при  $\operatorname{Re} a < 0$  ( $> 0$ ) неподвижная точка этого преобразования устойчива (неустойчива) на центральном многообразии. Это же справедливо и для цикла. Нетрудно убедиться, что  $u + s = n - 1$ , где  $u = \dim W^u$ ,  $s = \dim W^s$ , поэтому при  $\operatorname{Re} a < 0$ ,  $\dim S^s = s + 2$ ,  $\dim S^u = u$ , а при  $\operatorname{Re} a > 0$ ,  $\dim S^s = s$ ,  $\dim S^u = u + 2$ . Так как  $\dim S^s + \dim S^u = n + 1$ , то наличие изолированной гомоклинической траектории в классе векторных полей с таким циклом — явление общего положения.

**Лемма (В. С. Афраймович, 1985).** Если векторное поле, удовлетворяющее требованиям, наложенным в примере 2 или 3, имеет гомоклиническую траекторию цикла, по которой трансверсально пересекаются множества  $S^u$  и  $S^s$ , то все векторные поля из некоторой окрестности поля в пространстве  $\mathcal{X}^r(M)$  имеют бесконечное множество неблуждающих траекторий и, следовательно, поле не принадлежит границе множества векторных полей Морса—Смейла.

Поскольку в этой статье рассматриваются лишь бифуркации в окрестности границы множества систем Морса—Смейла, то всюду ниже гомоклинические траектории негиперболического цикла рассматриваются только в том случае, когда один из мультипликаторов цикла равен 1.

#### 1.4. Нетрансверсальные пересечения многообразий.

**Определение.** Два гладких подмногообразия  $A$  и  $B$   $n$ -мерного многообразия имеют *простое касание* в точке  $P$ , если сумма их размерностей не меньше  $n$  и, кроме того,

1) Прямая сумма касательных плоскостей в точке  $P$  к подмногообразиям  $(n-1)$ -мерна:  $\dim(T_P A + T_P B) = n - 1$ .

2) Если  $f$  — гладкая функция с не критической точкой  $P$ , равная нулю на  $A$  и имеющая критическую точку  $P$  на  $B$ , то второй дифференциал (гессиан) ограничения  $f$  на  $B$  в точке  $P$  — квадратичная форма на  $T_P B$ . Требуется, чтобы ограничение этой формы на  $T_P A \cap T_P B$  было невырождено.

**Замечание.** Простота касания не зависит ни от выбора функции, ни от того, на каком из двух многообразий она обращается в нуль.

**Определение.** Два гладких подмногообразия  $A$  и  $B$   $n$ -мерного многообразия  $M^n$  имеют *кваситрансверсальное пересечение* в точке  $P$ , если  $\dim A + \dim B = n - 1$ , и существуют окрестность  $U$  точки  $P$  и  $(n-1)$ -мерное гладкое подмногообразие  $M^{n-1}$  такие, что многообразия  $A \cap U$  и  $B \cap U$  принадлежат  $M^{n-1}$  и как подмногообразия  $M^{n-1}$  трансверсально пересекаются в точке  $P$ .

**Лемма ([180]).** Два гладких подмногообразия  $A$  и  $B$   $n$ -мерного многообразия  $M$  имеют простое касание в точке  $P$ , если и только если существует система координат  $\{(x_1, \dots, x_n)\}$  в некоторой окрестности  $U$  точки  $P$  такая, что пересечения  $A \cap U$  и  $B \cap U$  задаются уравнениями

$$A \cap U = \{x_k = 0, a - 1 \leq k \leq n\};$$

$$B \cap U = \left\{ x_k = 0, 1 \leq k \leq n - (b + 1), x_n = \sum_{i=n-b}^a \varepsilon_i x_i^2, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

Здесь  $a = \dim A$ ,  $b = \dim B$ ; если  $n = b + 1$ , то линейные уравнения во второй системе отсутствуют;  $x(P) = 0$ .

**Определение.** Два инвариантных многообразия векторного поля имеют *траекторию простого касания* (кваситрансверсального пересечения), если они пересекаются по неединичной фазовой кривой, и в какой-либо (а следовательно, и в каждой) точке этой кривой их пересечения с трансверсалью к полю имеют простое касание (кваситрансверсальное пересечение).

**1.5. Контурь.** Нелокальные бифуркации, связанные с простыми касаниями и квазитрансверсальными пересечениями, разбиваются на два класса с существенно различными свойствами, в зависимости от существования (или несуществования) так называемых контуров.

**Определение.** Последовательность  $Q_0, \dots, Q_k$ , где каждое  $Q_i$  — либо положение равновесия, либо предельный цикл,  $k \geq 2$ ,  $Q_0 = Q_k$ , образует *контур*<sup>1)</sup>, если  $S_{Q_{i+1}}^s \cap S_{Q_i}^u \neq \emptyset$ ,  $i \in \{0; \dots; k-1\}$ .

**Теорема ([198]).** Если все  $Q_i$  гиперболичны и все пересечения трансверсальны, то векторное поле (и все близкие поля) имеет счетное множество предельных циклов.  $\blacktriangle$

Поэтому для векторного поля общего положения, имеющего контур и лежащего на границе множества векторных полей Морса—Смейла, либо:

1) все  $Q_i$  гиперболичны и существует траектория простого касания (либо квазитрансверсального пересечения), либо

<sup>1)</sup> В литературе употребляется также термин «цикл» и не всегда предполагается, что  $k \geq 2$ .

2) все пересечения трансверсальны, но одно (и только одно) из  $Q_i$  негиперболично (и принадлежит классу, описанному в п.п. 1.2—1.3).

**З а м е ч а н и е.** Пусть для векторного поля на двумерной поверхности существует контур. Если  $Q_j$  — положение равновесия, то оно либо седло, либо седло-узел, а если цикл, то — с мультипликатором  $+1$ <sup>1)</sup>. Если в состав контура входит более одного положения равновесия или одного цикла, то векторное поле принадлежит множеству коразмерности, не меньшей двух, в пространстве векторных полей. Действительно, если в состав такого контура входит  $i$  циклов,  $i \in \{0; 1; 2\}$ , то существует не менее  $(2-i)$  сепаратрис, соединяющих соседние седла или седло-узлы.

Таким образом, единственно возможный (в коразмерности 1) контур на поверхности состоит из цикла с мультипликатором  $+1$  и седла. Векторное поле с таким контуром может возникнуть на поверхности рода больше нуля (но не на сфере или проективной плоскости) (рис. 33). Поле в этом случае — квази-общее, но не первой степени негрубости (см. § 2).

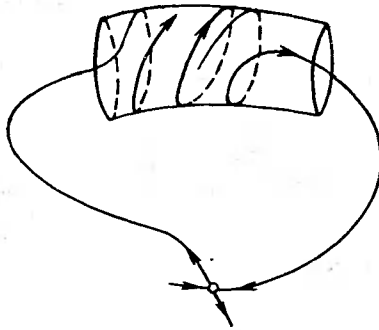


Рис. 33. Контур на двумерной поверхности, образованный полустойчивым циклом и седлом

**Л е м м а.** Пусть имеет место случай 2) и  $Q_j$  негиперболично. Тогда либо:

а)  $Q_j$  — положение равновесия с одномерным центральным многообразием, седло по гиперболическим переменным, и имеет счетное множество гомоклинических траекторий, либо

б)  $Q_j$  — цикл с мультипликатором  $+1$ , имеющий гомоклиническую траекторию.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Используя трансверсальность пересечений устойчивых и неустойчивых множеств и  $\lambda$ -лемму [138],

<sup>1)</sup> Конечно, предполагается, что особые точки и циклы принадлежат классу, описанному в п.п. 1.2, 1.3.

аналогично [198], можно показать, что  $Q_j$  имеет гомоклиническую траекторию, по которой устойчивое и неустойчивое множества пересекаются трансверсально. Следовательно, если  $Q_j$  — положение равновесия, то в силу п. 1.2, оно не может иметь двумерного центрального многообразия. Если же  $\dim W_{Q_j}^c = 1$ , то  $Q_j$  не может быть узлом по гиперболическим переменным (тогда было бы либо  $\dim S_{Q_j}^s = 1$ , и  $S_{Q_j}^s \subset S_{Q_j}^u$ , либо  $\dim S_{Q_j}^s = 1$ , и  $S_{Q_j}^u \subset S_{Q_j}^s$ , т. е.  $k=1$ , что невозможно), и окончательно, а) следует из [32].

Пусть теперь  $Q_j$  — цикл. Если он имеет мультипликатор  $(-1)$ , или пару мультипликаторов  $e^{\pm i\varphi}$ , то, в силу леммы пункта 1.3, векторное поле не принадлежит границе множества векторных полей Морса — Смейла. ▶

Случай 2а) будет рассмотрен в § 3, случай 2б) в § 4, а случай 1) — в § 6.

**1.6. Бифуркационные поверхности.** Рассмотрим множество  $\mathcal{B}_1$  всех векторных полей на  $M$ , имеющих либо негиперболическую особую точку, либо негиперболический предельный цикл, либо траекторию, принадлежащую нетрансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразия двух гиперболических особых точек или циклов, или точки и цикла.

Теорема ([199] — [201]). Существует открытое всюду плотное подмножество  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1$ , которое в окрестности каждой своей точки в  $\mathcal{X}^r(M)$  является гладкой гиперповерхностью коразмерности один. Векторные поля в  $\mathcal{B}_1$  имеют особые точки или циклы, или траектории простого касания, или квазитрансверсального пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий, перечисленные в п.п. 1.2—1.4.

Компоненты множества  $\mathcal{B}_1$ , отвечающие векторным полям с перечисленными в п.п. 1.2—1.4 вырождениями, будем называть бифуркационными поверхностями. Гладкость бифуркационных поверхностей можно доказать с помощью построения гладких функционалов, невырожденные уровни которых совпадают с этими поверхностями. Такие функционалы существуют для всех перечисленных бифуркационных поверхностей.

В качестве примера приведем функционал для негиперболической особой точки с одномерным центральным многообразием. Пусть векторное поле  $v_0 \in \mathcal{B}_1$  имеет негиперболическую особую точку  $O$  с одномерным центральным многообразием. Введем систему координат  $\{(x, y_1, \dots, y_{n-1})\}$  так, чтобы ось  $Ox$  касалась центрального многообразия в точке  $O$ , а за  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$  выберем карту в дополнительной плоскости. Тогда любое  $C^2$ -ближкое к  $v_0$  векторное поле  $v$  запишется в виде  $\dot{x} = f(x, y)$ ,  $\dot{y} = g(x, y)$ ,  $\det \partial g / \partial y(0) \neq 0$ . Поэтому уравнение  $g = 0$  имеет единственное решение  $y = \varphi(x)$ . Значение  $f$  в точке экстремума функции  $f(x, \varphi(x))$  и полагается равным значению функционала  $\chi$  на  $v$ .

Как видно, при построении функционала векторное поле рассматривается на нулевой изоклине гиперболических переменных и проектируется на ось негиперболической переменной; за значение функционала принимается значение этой проекции в точке ее экстремума. В силу наложенных на  $v_0$  условий, изоклина, проекция и точка экстремума гладко зависят от  $v$ .

Пример. Рассмотрим семейство  $v(\epsilon)$  уравнений на  $\mathbb{R}^1$ :

$$\dot{x} = \alpha(\epsilon) + \beta(\epsilon)x + \gamma(\epsilon)x^2 = f(x, \epsilon), \quad \alpha(0) + \beta(0) = 0 \neq \gamma(0).$$

По определению,  $\kappa(v(\epsilon)) = f(x_0(\epsilon), \epsilon) = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\gamma}$ . Если  $\alpha, \beta, \gamma$  — гладкие функции и  $\frac{\partial}{\partial \epsilon} f(x_0(\epsilon), \epsilon) \neq 0$  при  $\epsilon = 0$ , то  $v(\epsilon)$  — трансверсально  $\mathcal{B}_1$  в точке  $v(0)$ .

Из примера видно, что знание функционалов, определяющих бифуркационные поверхности, позволяет конструировать трансверсальные к ним однопараметрические семейства векторных полей.

**1.7. Характеристики бифуркаций.** Бифуркации удобно классифицировать по следующим характеристикам бифуркационных поверхностей:

а) Достижимость или недостижимость бифуркационной поверхности из области грубых систем, границей которой она является<sup>1)</sup>. Очевидно поверхность может быть достижима с одной стороны, с обеих или не достижима ни с какой стороны. В примере п. 1.1 бифуркационная поверхность недостижима со стороны  $\epsilon > \epsilon_0$  из-за замыкания сепаратрис при  $\epsilon = \epsilon_0$ .

в) Для бифуркационных поверхностей, принадлежащих границе множества систем Морса—Смейла, приведем следующее

**Определение.** Бифуркация называется *не выводящей* из класса систем Морса—Смейла, если по обе стороны соответствующей бифуркационной поверхности в шаре в  $\chi^r(M)$  достаточно малого радиуса с центром в точке на этой поверхности всюду плотны системы Морса—Смейла.

Бифуркационная поверхность может отделять системы Морса—Смейла от систем с бесконечным неблуждающим множеством — при переходе через нее может, например, родиться странный аттрактор или нетривиальное гиперболическое множество (определенно см. в [198]), или сложное предельное множество, содержащее бесконечно много траекторий.

В соответствии с указанными признаками, исследования к настоящему времени бифуркации коразмерности 1 удобно объединить в таблицу (см. табл. 1) следующей структуры. Она со-

<sup>1)</sup> Напомним, что граничная точка  $v_0$  открытого множества  $U$  называется *достижимой*, если существует путь (гомеоморфный образ замкнутого отрезка), все точки которого, кроме граничной, совпадающей с  $v_0$ , целиком лежат в  $U$ .

Таблица 1

Класс	Подкласс	Достижимость, недостижимость	Не выводит, выводит из класса систем Морса — Смейла	Рождается цикл	Рождается нетриви- альное предельное множество	Рождается странный аттрактор
Негиперболическая особая точка	нет гомоклиниче- ских траекторий	++	+	0	—	—
	одна гомоклиниче- ская траектория	++	+	1	—	—
	не меньше двух гомоклиниче- ских траекторий	++	+	$\infty$	$\Omega$	—
Негиперболический цикл с мультиплика- тором $+1$	нет гомоклиниче- ских траекторий	++ или +—	+	0 или 2	—	—
	объединение гомо- клинических тра- екторий и цикла компактно	++ или +—	+ или —	k или $\infty$	$T^2$ или $K^2$ или $\Omega$ или ?	+ или —
	объединение гомо- клинических тра- екторий и цик- ла некомпактно	++ или +—	—	$\infty$	$\Omega$	+ или —
Гиперболическая особая точка с гомо- клинической траекто- рией		++	+	1	—	—
Простое касание или квазитрансвер- сальное пересечение устойчивых и не- устойчивых многооб- разий.	нет контуров или гомоклинических траекторий	++ или +— или —	+	0	—	—
	есть контуры или гомоклинические траектории	+— или ?	—	$\infty$	$\Omega$	—



стоит из 7 столбцов. В столбце 1 — «класс» — указывается тип особенности. В столбце 2 — «подкласс» — наличие или отсутствие гомоклинических траекторий или другая характеристика бифуркационной поверхности. В столбце 3 — «достижимость, недостижимость» — в случае достижимости бифуркационной поверхности с обеих сторон будем ставить знак «++», с одной — знак «+-», в случае недостижимости с обеих сторон — знак «--». В столбце 4 — «не выводит, выводит из класса систем Морса—Смейла» — если бифуркация не выводит из класса систем Морса—Смейла, то ставится знак «+», если выводит — знак «-». В столбце 5 — «рождается цикл» — если рождается  $p$  циклов, то ставим  $p$ , если бесконечно много циклов — то « $\infty$ ». В столбцах 6 и 7 — «рождается нетривиальное предельное множество» или «рождается странный аттрактор» — ставится знак «+», если рождается, и знак «-», если нет.

**1.8. Сводка результатов** (см. таблицу 1 стр. 96). В столбце 6  $T^2$  и  $K^2$  — это двумерный тор и бутылка Клейна соответственно. В столбце 5 знак «к» обозначает возможность рождения конечного множества предельных циклов. В столбце 6 знак  $\Omega$  означает наличие нетривиального гиперболического множества. Знак ? означает, что вопрос открыт.

## § 2. Нелокальные бифуркации потоков на двумерных поверхностях

Простейший пример нелокальной бифуркации на двумерной поверхности — появление *«седловой связки»*, когда выходящая сепаратриса одного седла пересекается при изменении параметра в некоторый момент с входящей сепаратрисой другого (и, следовательно, сливается с ней при этом значении параметра). При прохождении бифуркационного значения параметра сепаратрисы обоих седел «меняются местами». Эта бифуркация встречается неустранимым образом в однопараметрических семействах векторных полей, т. е. является типичной.

Заметим, что седловая связка — это траектория, принадлежащая единственно возможному нетрансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболических положений равновесия и (или) циклов.

Цель настоящего параграфа — описать (насколько возможно) бифуркации в типичных однопараметрических семействах векторных полей на замкнутых поверхностях, а также структуру бифуркационного множества в функциональном пространстве векторных полей.

З а м е ч а н и е. Напомним следующий результат

**Теорема** ([8], [9], [185]). 1. Любая грубая (структурно устойчивая) система на замкнутой поверхности является системой Морса—Смейла. 2. Множество грубых (структурно устой-

чивых) векторных полей на замкнутой двумерной поверхности открыто и плотно в  $\chi^r(M)$ .

Таким образом, любая негрубая система является граничной для множества систем Морса—Смейла.

**2.1. Полулокальные бифуркации потоков на поверхностях.** Теорема ([8], [9]). В типичных однопараметрических семействах векторных полей на плоскости возможны лишь следующие полулокальные бифуркации:

а. Рождение цикла из гомоклинической траектории седлоузла.

б. Появление и распад седловой связки.

в. Рождение предельного цикла из петли сепаратрисы невырожденного седла.

Если *седловая величина* (сумма собственных значений линеаризации векторного поля в седле) отрицательна, то рождающийся из петли сепаратрисы цикл устойчив, если положительна, то неустойчив.

Эти бифуркации изображены на рис. 34. Их многомерные аналоги исследованы в §§ 3, 6, 5 соответственно.

Векторные поля с петлей сепаратрисы седла, имеющего нулевую седловую величину, встречаются в типичных семействах с не менее чем двумя параметрами. Бифуркации таких полей в типичных двухпараметрических семействах описаны в п. 2.6. Бифуркации петли сепаратрисы в типичных многопараметрических семействах исследованы в работе [79].

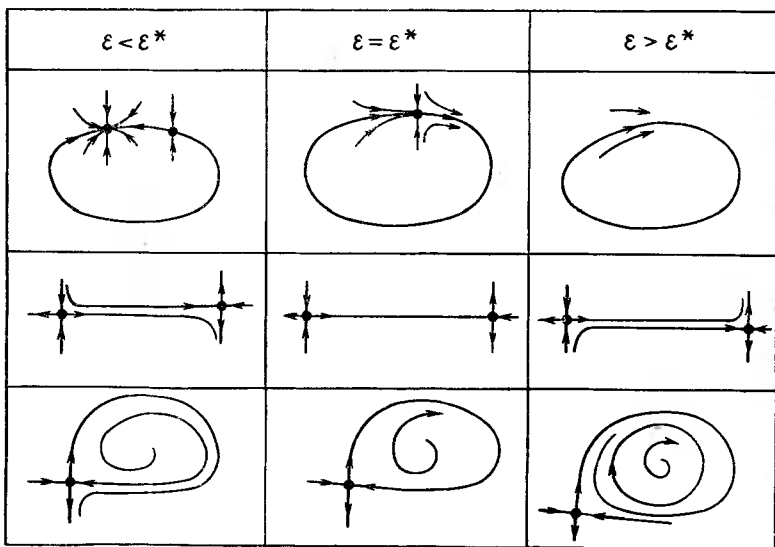


Рис. 34. Полулокальные бифуркации коразмерности 1 на поверхностях

**2.2. Нелокальные бифуркации на сфере; однопараметрический случай.** Начнем с определений. Пусть  $M$  — двумерная замкнутая гладкая поверхность,  $\Psi^{h,r}(M)$  — множество  $C^h$ -гладких семейств  $C^r$ -гладких векторных полей на  $M$ ; это множество состоит из  $C^h$ -отображений отрезка  $I=[0, 1] \ni \varepsilon$  в пространство  $\chi^r(M)$ . Семейство *типично*, если оно принадлежит множеству второй категории Бэра<sup>1)</sup> в  $\Psi^{h,r}(M)$ .

**Определение ([169]).** Два семейства  $\{v_\varepsilon\}, \{w_\varepsilon\} \subset \Psi^{h,r}(M)$  *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм  $H=(h, \eta): M \times I \rightarrow M \times I$  (где  $\eta$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $I$ ) такой, что для любого  $\varepsilon \in I$  гомеоморфизм  $(h, \eta(\varepsilon)) \equiv h_\varepsilon: M \rightarrow M$  есть топологическая эквивалентность между  $v_\varepsilon$  и  $w_\varepsilon$ . Семейство называется *структурно устойчивым*, если оно топологически эквивалентно любому близкому семейству; другими словами, если оно принадлежит внутренности своего класса эквивалентности.

Определение *слабой топологической эквивалентности* семейств получится, если в предыдущем определении считать, что отображение  $h_\varepsilon = H(\cdot, \varepsilon): M \rightarrow M$  по-прежнему гомеоморфизм, но не обязательно непрерывно зависящий от  $\varepsilon$ . Семейство называется *слабо структурно устойчивым*, если оно слабо топологически эквивалентно любому близкому семейству.

Легко видеть, что семейство, содержащее лишь грубые векторные поля, будет структурно устойчивым.

«Теорема». 1. В типичном однопараметрическом семействе векторных полей на  $S^2$ ,  $r \geq 2$ ,  $k \geq 1$ , встречается не более счетного множества бифуркационных значений параметра (в окрестности которых семейство топологически перестраивается). При остальных значениях параметра поле грубое.

2. При изолированных бифуркационных значениях параметра возможны лишь те нелокальные бифуркации, которые перечислены в теореме пункта 2.1.

3. Точки накопления бифуркационных значений параметра являются их односторонними пределами и могут быть лишь следующих двух типов: а) в бифуркационный момент, соответствующий точке накопления бифуркационных значений параметра, векторное поле имеет петлю сепаратрисы седла, являющуюся предельной для устойчивой или неустойчивой сепаратрисы другого седла (рис. 35); б) поле имеет цикл с мультипликатором  $+1$ , предельный для устойчивой и неустойчивой сепаратрис двух разных седел (рис. 32). К этим точкам накапливаются бифуркационные значения, отвечающие векторным полям, имеющим седловые связи.

<sup>1)</sup> Множество второй категории Бэра — это пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств.

4. Однопараметрическая деформация соответствующей бифуркационному значению параметра системы, определенная типичным семейством, при значениях параметра, близких к бифуркационному, топологически версальна и структурно устойчива: любая другая деформация топологически эквивалентна индуцированной из данной, любая близкая однопараметрическая деформация топологически эквивалентна данной.

5. Семейство в целом структурно устойчиво. ▲

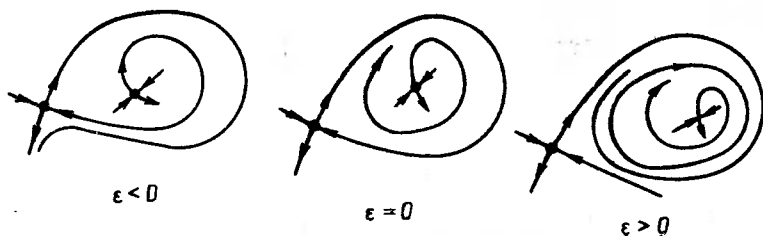


Рис. 35. Бифуркация петли сепаратрисы, предельной для сепаратрисы другого седла. При  $\epsilon < 0$  показан момент возникновения седловой связки

Полное доказательство теоремы не опубликовано. Заключение 2 доказано в работах [8], [9], из которых, кроме того, можно вывести 4 (см. также [156]). Отдельные результаты содержатся в [169], [201]. Ниже будут подробнее описаны типичные семейства и уточнено, какие пункты теоремы не доказаны.

**2.3. Типичные семейства векторных полей.** Типичное семейство векторных полей — это дуга в функциональном пространстве, трансверсально пересекающая бифуркационную поверхность в «типичной точке». Чтобы строго определить эти точки, необходимо выделить класс систем «общего положения» в множестве всех негрубых систем.

· **Определение ([201]).** Векторное поле на двумерной поверхности называется *квазиобщим*, если неблуждающее множество порождаемой им динамической системы состоит из конечного числа положений равновесия и циклов, причем выполнено одно из двух условий:

1) все положения равновесия и циклы гиперболичны, и имеется единственная седловая связка — сепаратриса, идущая из седла в седло;

2) все положения равновесия и циклы гиперболичны, кроме одного; набор собственных значений негиперболической особой точки или мультипликаторов негиперболического цикла вырожден; соответствующее вырождение имеет коразмерность 1 и опи-

сано выше (см. § 2, гл. 1 и § 1, гл. 2). Кроме того, нет седловых связок и сепаратрис, «соединяющих» седло-узел и седло<sup>1)</sup>.

Динамическая система, порожденная квазиобщим полем, называется *квазиобщей*.

**Теорема ([201]).** Если  $r \geq 4$  и  $M$  — либо замкнутая ориентируемая поверхность, либо замкнутая неориентируемая поверхность рода  $g \leq 3$ <sup>2)</sup>, то множество квазиобщих векторных полей класса  $C^r$  на  $M$ : 1) является  $C^{r-1}$ -подмногообразием пространства векторных полей  $\chi^r(M)$ , погруженным в него; 2) всюду плотно в бифуркационном множестве.

Пусть  $B$  — произвольное связное подмножество топологического пространства  $X$ . Окрестностью точки  $x \in B$  во внутренней топологии будем называть содержащую  $x$  связную компоненту пересечения  $B$  с окрестностью точки  $x$  в объемлющем пространстве  $X$ . Это определение задает «внутреннюю» топологию в множестве квазиобщих векторных полей (в объемлющем пространстве  $\chi^r(M)$ ). В случае, когда квазиобщие системы плотны в бифуркационном множестве в смысле внутренней топологии, однопараметрическое семейство общего положения содержит только грубые и квазиобщие системы (рис. 36а). Если квазиобщие системы плотны в бифуркационном множестве лишь в топологии, индуцированной вложением в пространство векторных полей, то в однопараметрических семействах неустрашимым малым шевелением образом могут встречаться негрубые и не квазиобщие поля (рис. 36 б).

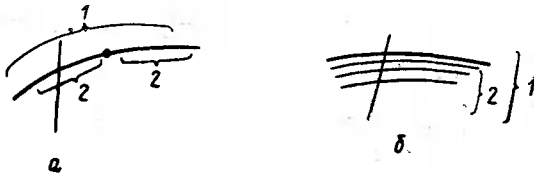


Рис. 36. Возможное расположение бифуркационных поверхностей:

«1» — негрубые векторные поля, «2» — квазиобщие поля, а. Плотность во внутренней топологии. б. Плотность в топологии объемлющего пространства. Линия, трансверсально пересекающая бифуркационные поверхности, изображает типичное однопараметрическое семейство

**Теорема.** Множество квазиобщих векторных полей на двумерной сфере или проективной плоскости плотно в множестве всех негрубых векторных полей с внутренней топологией.

Эта теорема следует из классических результатов [8], [9].

<sup>1)</sup> Под сепаратрисой положения равновесия типа седло-узел подразумевается здесь часть центрального многообразия, не принадлежащая двумерному устойчивому или неустойчивому множеству; другими словами, общая граница двух гиперболических секторов.

<sup>2)</sup> Ограничения на топологический тип поверхности появляются из-за того, что для поверхностей, не перечисленных в формулировке теоремы, не доказана в  $C^r$ -топологии лемма о замыкании при  $r \geq 2$ .

Введем в рассмотрение класс  $\Phi^{k,r} \subset \Psi^{k,r}$  однопараметрических семейств векторных полей на сфере, выделяемый следующими условиями: 1) каждое векторное поле в семействе либо грубое, либо квазиобщее, 2) семейство трансверсально пересекает бифуркационное множество, 3) если семейство содержит квазиобщее векторное поле, отвечающее ситуации рис. 32, то выполнены условия типичности, сформулированные в следующем пункте.

По-видимому, теорема пункта 2.2 справедлива для семейств, принадлежащих  $\Phi^{k,r}(S^2)$ .

**2.4. Условия типичности.** Предположим, что семейство  $\{v_\varepsilon\}$  содержит векторное поле, отвечающее ситуации рис. 32. На трансверсали  $l$  к циклу с мультипликатором  $+1$  определено отображение последования  $f_0$  векторного поля  $v_0$ . Пусть  $x$  — локальная координата на  $l$  такая, что: 1) циклу соответствует  $x=0$ ; 2)  $P_1, \dots, P_k$  — точки сепаратрис (различных) седел,  $\omega$ -асимптотических к циклу, а  $Q_1, \dots, Q_m$  —  $\alpha$ -асимптотических к нему, такие что

$$x(P_1) < \dots < x(P_k) < x(f_0 P_1) < 0 < x(Q_1) < \dots \\ \dots < x(Q_m) < x(f_0 Q_1).$$

Если  $k \leq 1$  или  $m \leq 1$ , то никаких условий, кроме 1), 2) (в предыдущем пункте), на семейство не налагается. Пусть  $k > 1$  и  $m > 1$ . Как установлено в [169], [180],  $f_0$  можно вложить в однозначно определенный гладкий поток  $\{g^t\}$  на  $l$ , так что  $f_0(P) = g^1(P)$ . Положим

$$P_2 = g^{t_1} P_1, \dots, P_k = g^{t_{k-1}} P_1, \quad Q_2 = g^{\bar{t}_1} Q_1, \dots, Q_m = g^{\bar{t}_{m-1}} Q_1.$$

Условия общего положения [169]:

$$|t_i - t_j| \neq |\bar{t}_\alpha - \bar{t}_\beta|, \quad 1 - |t_i - t_j| \neq |\bar{t}_\alpha - \bar{t}_\beta|,$$

$$i \neq j; \quad \alpha \neq \beta; \quad i, j \in \{1, \dots, k-1\}; \quad \alpha, \beta \in \{1, \dots, m-1\}.$$

В [169] приведена схема доказательства структурной устойчивости семейства (точнее, схема доказательства версальности деформации поля  $v_0$ ) при выполнении сформулированных условий. Если эти условия не выполнены, то существует сколь угодно близкое к исходному семейство, содержащее векторные поля с двумя (или больше) седловыми связками (Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко, 1986).

**2.5. Однопараметрические семейства на поверхностях, отличных от сферы.** Ясно, что для любой поверхности можно выделить класс однопараметрических семейств векторных полей  $\Phi^{k,r}(M)$ , аналогичный  $\Phi^{k,r}(S^2)$ , т. е. класс дуг в функциональном пространстве, пересекающих бифуркационное множество лишь в точках множества квазиобщих векторных полей. Это сделано в [169], где приведена схема доказательства открытости такого класса в множестве всех однопараметрических семейств. Изо-

лированные бифуркационные значения в семействе этого класса отвечают системам 1-ой степени негрубости.

Определение ([6]). Динамическая система называется системой 1-й степени негрубости, если она не груба и существует такая ее окрестность, что каждая динамическая система из этой окрестности либо груба, либо орбитально топологически эквивалентна исходной, причем сопрягающий гомеоморфизм близок к тождественному. Векторное поле, порождающее систему 1-й степени негрубости, называется векторным полем 1-й степени негрубости.

Теорема ([6], [8], [9], [15], [16]). Пусть замкнутая поверхность  $M$  либо ориентируема, либо неориентируема и рода  $g \leq 3$ . Тогда гладкая динамическая система на  $M$ , обладающая следующими свойствами: 1) квазиобщая; 2) не имеющая сепаратрис седел, содержащих в множестве своих предельных точек петли сепаратрис других седел (или того же самого седла); 3) не имеющая сепаратрисы седла, содержащей в множестве своих  $\alpha$ -предельных ( $\omega$ -предельных) точек негиперболический цикл, который содержался бы также в множестве  $\omega$ -предельных ( $\alpha$ -предельных) точек некоторой сепаратрисы другого или того же самого седла и, в частности, не имеющая контуров; 4) не имеющая гомоклинических траекторий негиперболического цикла — является системой 1-й степени негрубости.

Следствие. Бифуркации систем первой степени негрубости на указанных в теореме поверхностях полулокальны. (Всегда можно указать конечное множество траекторий, в окрестности которого только и происходит рождение или исчезновение неблуждающих траекторий или слияние сепаратрис). Фактически, это бифуркации полуустойчивых циклов, седловых связок и петель сепаратрисы (рис. 34).

Точки накопления бифуркационных значений в семействе из  $\Phi^{h,r}(M)$  и бифуркации в окрестностях этих точек могут быть рассмотрены аналогично соответствующим бифуркациям в семействе  $\Phi^{h,r}(S^2)$ , по крайней мере, если поверхность ориентируема [169]. Однако для поверхностей, на которых система может иметь нетривиальные (т. е. отличные от положения равновесия и цикла) устойчивые по Пуассону траектории, т. е. для всех поверхностей, кроме сферы  $S^2$ , проективной плоскости  $P^2$  и бутылки Клейна  $K^2$ , в типичном однопараметрическом семействе могут неустраиваемым образом встречаться векторные поля с бесконечным неблуждающим множеством. Бифуркации в таких семействах совершенно не описаны, кроме бифуркаций систем с глобальной секущей на двумерном торе (см. следующий пункт). Однако известно, что существуют типичные однопараметрические семейства на поверхностях, отличных от  $S^2$ ,  $P^2$ ,  $K^2$ , которые содержат негрубые векторные поля бесконечной степени негрубости (С. Х. Арансон, Функци. анализ и его прил., 1986, 20, № 1, 62—63). Для систем на  $S^2$  справедлив следующий результат.

Теорема ([6]—[9]). Множество систем первой степени негрубости открыто и плотно в множестве всех негрубых систем на  $S^2$ .

Для векторных полей на двумерном торе установлен более слабый результат.

Теорема (С. Х. Арансон, 1986). Множество векторных полей первой степени негрубости на торе открыто и плотно в пространстве негрубых векторных полей без особых точек с топологией, индуцированной из  $\chi^r(T^2)$ . Это утверждение верно и для  $P^2$  и  $K^2$ .

В обеих теоремах предполагается класс гладкости не меньше 2.

**2.6. Глобальные бифуркации систем с глобальной секущей на торе.** Исследование потоков на торе с глобальной секущей сводится к исследованию диффеоморфизмов окружности (являющихся отображениями последования). Здесь основной характеристикой, определяющей топологическую структуру, является число вращения Пуанкаре. Оно же характеризует глобальные бифуркации, осуществляющиеся при изменении параметра.

В [82] было отмечено, что зависимость числа вращения от параметра может описываться канторовской функцией.

О п р е д е л е н и е. Непрерывная функция  $\omega(\varepsilon) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^1$  — канторовская, если: 1) на  $[a, b]$  задано множество  $C$ , гомеоморфное канторову совершенному множеству; 2) функция  $\omega$  постоянна на всех смежных интервалах (связных компонентах разности  $[a, b] \setminus C$ ) и не равна константе на  $[a, b]$ .

Для векторного поля  $v_\varepsilon$  класса  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , непрерывно зависящего от  $\varepsilon$ , интервалы постоянства числа вращения могут соответствовать как рациональным, так и иррациональным значениям  $\omega$ ; кроме того, некоторым рациональным значениям могут не соответствовать интервалы постоянства<sup>1)</sup>.

Следующая теорема, доказанная в [17] методами работы [18] (см. [13]), устанавливает достаточные условия «общности» однопараметрического семейства отображений окружности.

Теорема. Пусть  $f_\varepsilon : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $\varepsilon \in [a, b]$ , — аналитически зависящее от  $\varepsilon$  семейство аналитических диффеоморфизмов (или аналитических гомеоморфизмов, не являющихся диффеоморфизмами) такое, что: 1) накрывающие отображения  $\bar{f}_\varepsilon : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$  имеют вид:  $\bar{f}_\varepsilon(x) = x + h(x, \varepsilon)$ , где  $h$  — аналитическая по  $x, \varepsilon$  функция, имеющая период 1 и такая, что при всех  $x \in \mathbf{R}^1$ ,  $\varepsilon \in [a, b]$ , выполнено одно из соотношений:  $\partial h / \partial \varepsilon < 0$ , либо  $\partial h / \partial \varepsilon > 0$ ; 2)  $\bar{f}_\varepsilon(z)$  — целая функция комплексного переменного, и на комплексной

<sup>1)</sup> Напомним, что рациональному числу вращения соответствует поле с циклом.



плоскости ( $z$ ) есть хотя бы один корень уравнения  $\frac{d}{dz} \bar{f}_\varepsilon(z) = 0$ . Тогда: 1) число вращения  $\omega(\varepsilon)$  диффеоморфизма  $f_\varepsilon$  — канторовская функция, не убывающая при  $\partial h / \partial \varepsilon > 0$  и не возрастающая при  $\partial h / \partial \varepsilon < 0$ ; 2) каждое свое рациональное значение функция  $\omega$  принимает на некотором интервале; 3) функция  $\omega$  строго возрастает при  $\partial h / \partial \varepsilon > 0$  (строго убывает при  $\partial h / \partial \varepsilon < 0$ ) на множестве тех значений  $\varepsilon$ , которым соответствуют иррациональные значения  $\omega$ .

Пример. отображение

$$\bar{f}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. График  $\omega(\varepsilon)$  представлен на рис. 37.

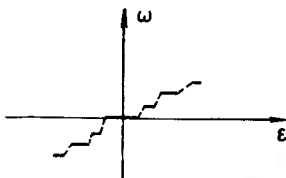


Рис. 37. График зависимости числа вращения от параметра

**З а м е ч а н и е.** Знание зависимости числа вращения от параметра позволяет указать все бифуркации, осуществляющиеся при изменении  $\varepsilon$ , за исключением, быть может, бифуркаций, происходящих при постоянном рациональном числе вращения, т. е. бифуркаций слияния и исчезновения (или возникновения) циклов при условии, что некоторые другие циклы при этом сохраняются (см. также п. 7.1).

**2.7. Некоторые глобальные бифуркации на бутылке Клейна.** До недавнего времени оставалась нерешенной проблема: существует ли на компактном многообразии однопараметрическое семейство векторных полей  $\{v_\varepsilon\}$  с базой  $[0, 1]$ , имеющих при  $\varepsilon < 1$  предельный цикл, длина которого неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow 1$ ; цикл расположен на положительном и отделенном от нуля равномерно по  $\varepsilon$  расстоянию от особых точек поля  $v_\varepsilon$  и исчезает при  $\varepsilon = 1$ . Такая бифуркация цикла получила название «катастрофа голубого неба» [184].

В [84] построено однопараметрическое семейство  $\{v_\varepsilon\}$  векторных полей на бутылке Клейна и двумерном торе, в котором происходит катастрофа голубого неба, причем на бутылке Клейна семейство является типичным, а поле  $v_1$  — квазиобщим: оно имеет двукратный предельный цикл  $L$ , а все остальные траектории — двоякоасимптотические к нему (при  $\varepsilon = 1$  на бу-

тылке Клейна нет глобальной секущей). При  $\varepsilon < 1$  этот цикл исчезает, возникают два цикла  $L_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , негомотопные  $L$ , один из которых устойчив, другой — неустойчив, а все остальные траектории блуждающие. Для всех  $\varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon < 1$ , поле  $v_\varepsilon$  — грубое, откуда следует достижимость бифуркационной поверхности в точке  $v_1$  из области грубых систем.

Для поля  $\tilde{v}_\varepsilon$ , являющегося поднятием  $v_\varepsilon$  при двулистном накрытии бутылки Клейна тором, при  $\varepsilon \neq 1$  существуют два предельных цикла  $\tilde{L}_\varepsilon^1$ ,  $\tilde{L}_\varepsilon^2$ , являющиеся прообразами циклов  $L_\varepsilon^1$ ,  $L_\varepsilon^2$  соответственно. При  $\varepsilon \rightarrow 1$  каждый цикл ведет себя следующим образом: он многократно накручивается по часовой стрелке на тор в некотором узком кольце  $K_1$ , а затем столько же раз раскручивается (против часовой стрелки) в некотором другом кольце  $K_2$ ;  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ , границы  $K_1$  и  $K_2$  — гомотопные друг другу окружности (рис. 38).

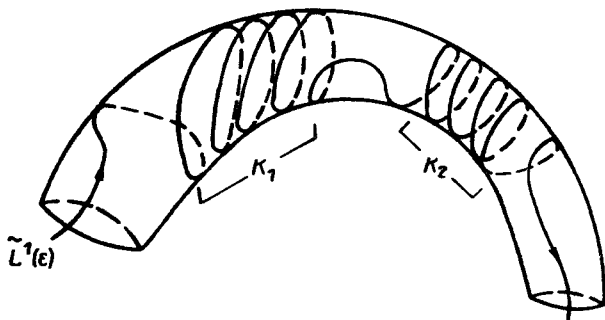


Рис. 38. Катастрофа голубого неба на двумерном торе

Кроме этого примера, других результатов по нелокальным бифуркациям на бутылке Клейна нет. Тем не менее, возможность полного описания бифуркаций в типичных однопараметрических семействах (теорема типа п. 2.2) кажется более осуществимой, чем на других поверхностях, поскольку на бутылке Клейна не могут существовать нетривиальные устойчивые по Пуассону траектории [16], [172].

**2.8. Бифуркации на двумерной сфере. Многопараметрический случай.** Хотя даже локальные бифуркации в высоких коразмерностях (начиная с трех) на диске полностью не исследованы, тем не менее, полезно затронуть вопрос о нелокальных бифуркациях в многопараметрических семействах векторных полей на двумерной сфере. При их описании возникает необходимость выделения множества траекторий, определяющих перестройки в семействе.

Определения (В. И. Арнольд, 1985).

1. Конечное подмножество фазового пространства называется *несущим бифуркацию*, если существует сколь угодно ма-

лая его окрестность и (зависящая от нее) окрестность бифуркационного значения параметра такие, что вне этой окрестности множества деформация (при значениях параметра из второй окрестности) топологически тривиальна.

Пример 1. Любая точка седловой связки (включая оба седла) несет бифуркацию, даже если добавить к ней еще любые другие точки. В системе с двумя седловыми связками точка на связке (внутренняя) несет бифуркацию лишь вместе с точкой на другой связке.

2. *Носителем бифуркации* называется объединение всех минимальных несущих бифуркацию множеств (минимальное — не содержащее собственного подмножества, несущего бифуркацию).

Пример 2. В системе с одной седловой связкой (стандартно бифурцирующей) носитель совпадает с седловой связкой, включая концы — седла.

3. Две деформации векторных полей с носителями бифуркации  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  называются *эквивалентными* или *слабо эквивалентными на носителях*, если существуют такие сколь угодно малые окрестности носителей и (зависящие от них) окрестности бифуркационных значений параметров, что ограничения семейств на эти окрестности носителей топологически эквивалентны или слабо эквивалентны<sup>1)</sup> над этими окрестностями бифуркационных значений.

Пример 3. Все деформации векторных полей с простой седловой связкой эквивалентны друг другу, независимо от числа грубых положений равновесия и циклов в системе в целом.

Пример 4. Трехпараметрические деформации векторного поля вблизи трехкратного цикла слабо топологически эквивалентны, но, вообще говоря, не эквивалентны: классификация таких деформаций по отношению топологической эквивалентности имеет функциональные инварианты (см. п. 5.11, гл. 2)

Гипотеза (В. И. Арнольд, 1985). В типичном  $l$ -параметрическом семействе векторных полей на  $S^2$ :

1) все деформации слабо эквивалентны конечному числу (зависящему лишь от  $l$ ) на своих носителях;

2) бифуркационные диаграммы, соответствующие отношению слабой эквивалентности, (локально) гомеоморфны конечному числу (зависящему лишь от  $l$ ) образцов;

3) осуществляющиеся деформации версальны и слабо структурно устойчивы;

4) семейство в целом слабо структурно устойчиво;

5) носители бифуркаций состоят из конечного (зависящего лишь от  $l$ ) числа (особых) траекторий;

<sup>1)</sup> Определение топологической и слабой топологической эквивалентности семейств и их структурной устойчивости и слабой структурной устойчивости аналогично приведенному в п. 2.2, лишь отрезок  $l$  нужно заменить окрестностью бифуркационного значения.

6) число точек минимального несущего множества ограничено (постоянной, зависящей лишь от  $l$ ).

Слабую эквивалентность здесь нельзя заменить обычной, см. пример 4.

Доказательство или опровержение приведенных утверждений, безусловно, необходимый этап при рассмотрении нелокальных бифуркаций в типичных  $l$ -параметрических семействах. Пока известно мало: даже для семейств, состоящих из грубых и квазиобщих векторных полей, пункты 3) и 4) (а только они для подобных семейств нетривиальны) не доказаны. Насколько нам известно, при  $l=2$  рассматривались лишь две нелокальные бифуркации.

**Теорема 1 ([92]).** В типичном двухпараметрическом семействе векторных полей класса  $C^r$ ,  $r \geq 3$ , встречаются только такие поля с петлей сепаратрисы седла, имеющего нулевую седловую величину, бифуркации которых в этом семействе изображены на рис. 39.

**Теорема 2.** Пусть векторное поле  $v_\varepsilon \in \chi^r(M)$ ,  $r \geq 6$ , имеет контур  $\Gamma$ , состоящий из двух седел  $O_1, O_2$  и двух сепаратрис  $\Gamma_1, \Gamma_2$  таких, что  $\alpha(\Gamma_1) = \omega(\Gamma_2) = \{O_1\}$ ,  $\alpha(\Gamma_2) = \omega(\Gamma_1) = \{O_2\}$ . Пусть  $\lambda_{ij}$  — собственные числа линейной

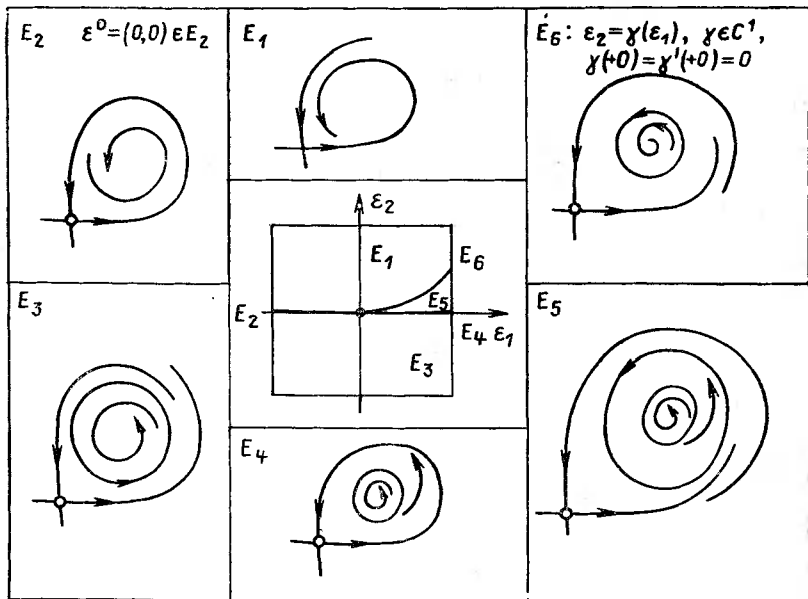


Рис. 39. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов для типичной двухпараметрической деформации векторного поля с петлей сепаратрисы. Бифуркационная кривая, отвечающая полустойчивому циклу, имеет бесконечный порядок касания с осью  $\varepsilon_1$  в нуле

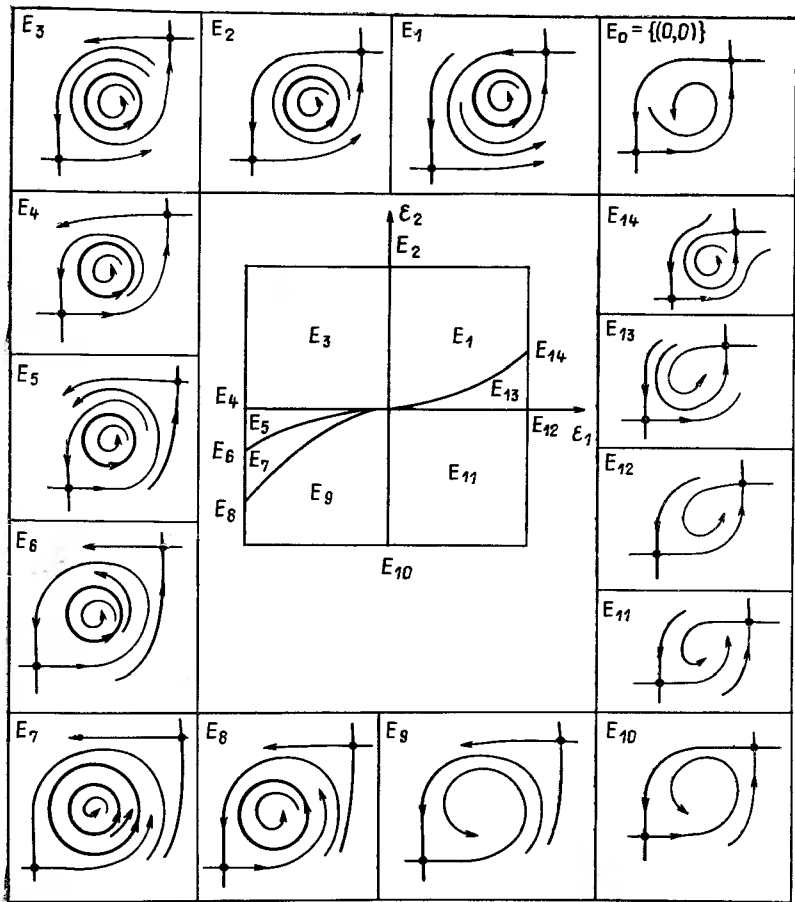


Рис. 40а. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов для типичной двухпараметрической деформации векторного поля с контуром из двух седел. а. Седловые величины разных знаков. б. Седловые величины одного знака

части поля  $v_0$  в точке  $O_i$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $\sigma_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2}$ ;  $\Delta = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$ . Предположим, что  $\Gamma$  имеет окрестность  $U$ , гомеоморфную  $\mathbb{R}^1 \times S^1$ , такую, что одна из компонент  $U \setminus \Gamma$  не пересекается с устойчивыми и неустойчивыми многообразиями точек  $O_1, O_2$ . Положим  $k=1$  ( $k=2$ ), если  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$ ,  $\Delta > 0$  ( $\Delta < 0$ ),  $k=3$ ,  $k=4$ ), если  $\sigma_i < 0$  ( $\sigma_i > 0$ ),  $i=1, 2$ . Тогда типичная двухпараметрическая деформация  $\{v_\varepsilon\} \subset \chi^r(M)$ ,  $r \geq 6$ , с носителем на  $\Gamma$  имеет бифуркационную диаграмму, изображенную на рис. 40а (рис. 40б) при  $k=1$  ( $k=3$ ), а при  $k=2$  ( $k=4$ ) — диаграмму, получающуюся из диаграммы рис. 40а (рис. 40б) сменой направ-

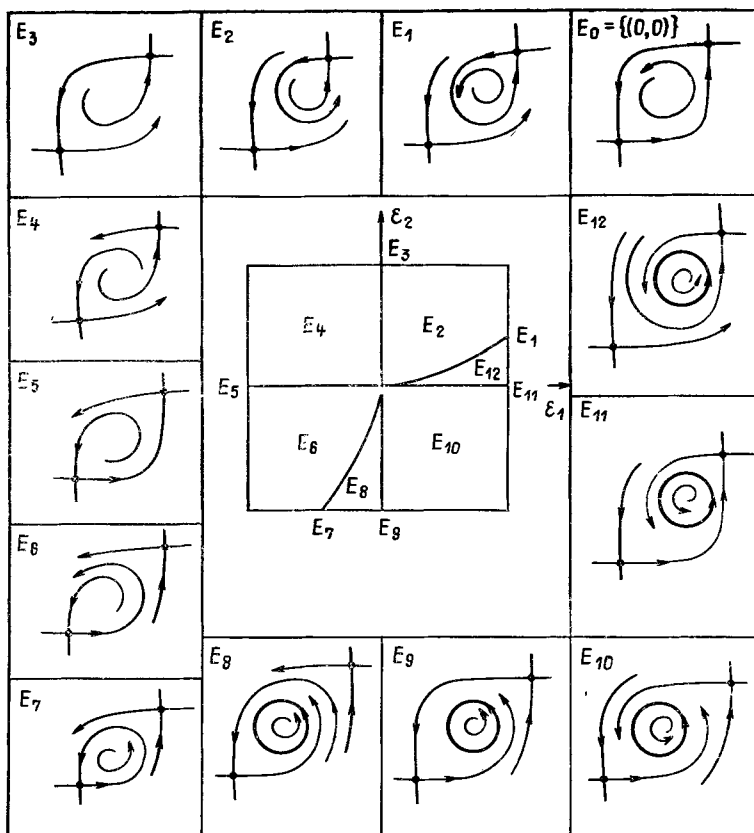


Рис. 406

ления времени. Перестройки фазовых портретов в теореме 2 также изображены на рис. 40а, б<sup>1)</sup>.

**2.9. Некоторые открытые вопросы.** Кроме приведенных в предыдущих пунктах этого параграфа, выделим еще несколько вопросов.

1. Какова структура компонент бифуркационного множества, отвечающих системам с бесконечным неблуждающим множеством?

В частности, могут ли они содержать подмногообразия ко-размерности 1?

2. Что можно сказать о бифуркациях систем на неориентируемой поверхности рода больше 3?

<sup>1)</sup> Случай *a* исследован В. Ш. Ройтенбергом (1985); случай *b* — В. П. Ноздрачевой, (РЖМат, 1981, 8Б233); рождение циклов при бифуркациях контуров на плоскости исследовано Рейном (Lect. Notes Math., 1980, № 810)

3. Как описать однопараметрические деформации квазиоб- щих систем, не являющихся системами первой степени негру- бости, в частности, бифуркации, в результате которых появля- ются и исчезают нетривиальные устойчивые по Пуассону траек- тории? (По-видимому, здесь не обойтись без символической динамики типа теории нидинг-последовательностей [135], [165].)

4. Что можно сказать о бифуркациях градиентных систем?

### § 3. Бифуркации гомоклинических траекторий негиперболической особой точки

Бифуркации, описанные в этом параграфе, происходят в од- нопараметрических семействах общего положения и приводят к возникновению грубого предельного цикла или нетривиально- го гиперболического множества.

#### 3.1. Узел по гиперболическим переменным.

**Т е о р е м а** ([109]). Пусть в однопараметрическом семействе общего положения нулевому (критическому) значению параметра соответствует векторное поле  $v_0$  с вырожденной особой точ- кой  $O$ , имеющей одно собственное значение  $0$ , узел по гипербо- лическим переменным и гомоклиническую траекторию  $\Gamma$  точки  $O$ . Тогда все некритические поля семейства, достаточно близкие к критическому, либо имеют две особые точки, близкие к  $O$  (когда параметр лежит по одну сторону от нуля), либо имеют устойчивый (или вполне неустойчивый)<sup>1)</sup> предельный цикл, ког- да параметр лежит по другую сторону от нуля. Этот цикл стре- мится к  $\Gamma \cup O$  при стремлении параметра к нулю.

**Т р е б о в а н и я о б щ н о с т и п о л о ж е н и я.** 1. На росток семейства в точке  $(0, 0)$  произведения фазового пространства на пространство параметров налагаются те же требования общности положения, что и в п. 2.1, гл. 1.2. На поле  $v_0$  нала- гается следующее нелокальное требование:  $\Gamma \cap W^s = \emptyset$ . Другими словами, гомоклиническая траектория входит внутрь, а не в край устойчивого множества. 3. Локальное семейство трансвер- сально пересекает гиперповерхность векторных полей с вырож- денной особой точкой.

Предыдущий результат можно сформулировать на языке пространств векторных полей.

**Т е о р е м а.** Пусть поле  $v_0$  удовлетворяет всем перечислен- ным выше требованиям. Тогда в пространстве  $C^2(U)$  векторных полей на некоторой окрестности  $U$  кривой  $\Gamma \cup O$ , наделенном то- пологией  $C^2$ , существует окрестность  $W$  поля  $v_0$ , обладающая следующим свойством. Окрестность  $W$  делится на две области гиперповерхностью  $B$ , проходящей через  $v_0$ , причем: все поля, лежащие по одну сторону от  $B$ , имеют две особые точки вбли-

<sup>1)</sup> Цикл называется вполне неустойчивым, если он становится устойчивым при обращении времени.

зи  $O$ ; все поля, лежащие по другую сторону от  $B$ , имеют устойчивый или вполне неустойчивый предельный цикл; все поля, лежащие на  $B$ , топологически эквивалентны  $v_0$  в области  $U$ .

**З а м е ч а н и е.** Все теоремы о бифуркациях вырождений коразмерности 1 имеют двойственные формулировки: на языке однопараметрических семейств и на языке гиперповерхностей в функциональном пространстве. Ниже теоремы формулируются в основном на языке семейств.

**3.2. Седло по гиперболическим переменным: одна гомоклиническая траектория.** Векторное поле с вырожденной особой точкой типа седло по гиперболическим переменным может иметь любое конечное число гомоклинических траекторий особой точки; такие поля встречаются неустранимым образом в однопараметрических семействах общего положения. Обозначим через  $p$  число гомоклинических траекторий вырожденной особой точки  $O$ . Случаи  $p=1$  и  $p>1$  резко отличаются друг от друга.

**Т е о р е м а** ([110]). Пусть в однопараметрическом семействе общего положения нулевому критическому значению параметра соответствует векторное поле  $v_0$  с вырожденной особой точкой  $O$  типа седло по гиперболическим переменным, имеющей одно собственное значение 0 и одну гомоклиническую траекторию. Тогда для этого семейства справедливо заключение первой теоремы п. 3.1, только рождающийся грубый цикл будет седловым (то есть гиперболическим, но ни устойчивым, ни вполне неустойчивым).

Требования общности положения на поле  $v_0$  и на семейство те же, что в п. 3.1 и, кроме того, требуется, чтобы устойчивое и неустойчивое множества пересекались трансверсально.

При бифуркации нескольких гомоклинических траекторий получаются поля, описываемые с помощью топологической схемы Бернулли.

**3.3. Топологическая схема Бернулли.** Пусть  $\Omega$  — пространство бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из  $p$  символов  $\{1, \dots, p\}$  с расстоянием

$$\rho(\omega, \omega') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha_k - \alpha'_k|}{2^{|k|}},$$

$$\omega = (\dots \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots), \quad \omega' = (\dots \alpha'_{-1}, \alpha'_0, \alpha'_1, \dots).$$

Через  $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$  обозначим гомеоморфизм, сдвигающий каждый член последовательности на следующее место:

$$\sigma\omega = \omega', \quad \omega = \{\alpha_k\}, \quad \omega' = \{\beta_k\}, \quad \beta_{k-1} = \alpha_k.$$

Пара  $(\sigma, \Omega)$  называется *топологической схемой Бернулли*. *Надстройкой* над топологической схемой Бернулли — это периодическое векторное поле  $X_\sigma$ , преобразование монодромии которого совпадает с  $\sigma$ . Это поле получается из стандартного векторного



поля  $\partial/\partial t$  на прямом произведении  $I \times \Omega$ ,  $I = \{t \in [0, 1]\}$ , с помощью склейки  $\chi$  точек  $(0, \sigma\omega)$  и  $(1, \omega)$ . Фазовый поток на подмножестве  $\Sigma$  евклидова пространства топологически эквивалентен надстройке над схемой Бернулли, если существует гомеоморфизм  $\Sigma \rightarrow I \times \Omega/\chi$ , переводящий исходное поле в  $X_\sigma$ .

**З а м е ч а н и е.** Подмножество  $\Sigma$  похоже на прямое произведение канторова совершенного множества на окружность.

**Пример.** Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — два квадрата на плоскости со сторонами длины 1, параллельными координатным осям, и центрами  $(1, 0)$  и  $(3, 0)$ . Рассмотрим отображение  $f: K_1 \cup K_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; отображение  $f|_{K_i}: (x, y) \mapsto A((x, y) + a_i)$  — суперпозиция переноса на вектор  $a_i$  и гиперболического поворота  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (10x, 0,1y)$  (рис. 41),  $a_1 = (-1, 1)$ ,  $a_2 = (-3, 3)$ . Множество точек плоскости, на которых определены все (положительные и отрицательные) итерации отображения  $f$ , гомеоморфно отображается на пространство последовательностей из двух символов следующим образом: точке  $P$  соответствует последовательность  $\alpha_k(P)$ , причем  $\alpha_k(P) = i$ , если и только если  $f^k(P) \in K_i$ . Нетрудно доказать, что это отображение — гомеоморфизм; очевидно, он сопрягает отображение  $f$  со сдвигом  $\sigma$ .

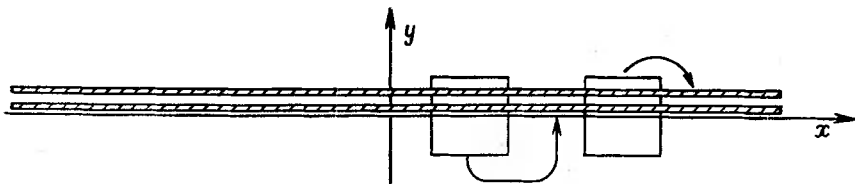


Рис. 41. Модельное отображение в задаче о бифуркации двух гомоклинических траекторий седлоузла

### 3.4. Седло по гиперболическим переменным: несколько гомоклинических траекторий.

**Теорема** ([113]). В типичном однопараметрическом семействе векторных полей встречаются векторные поля с вырожденной особой точкой  $O$ , имеющей одно собственное значение 0, седло по гиперболическим переменным и  $p$  гомоклинических траекторий  $\Gamma_i$  точки  $O$ ,  $p > 1$ . Тогда для всех полей  $v_\epsilon$ , соответствующих достаточно близким к критическому значениям параметра, лежащим по одну сторону от критического значения, справедливо следующее утверждение. Для некоторой окрестности  $U$  объединения  $O \cup \Gamma_i$  ограничение потока поля  $v_\epsilon$  на множество неблуждающих траекторий топологически эквивалентно надстройке над топологической схемой Бернулли из  $p$  символов.

Требования общности положения на семейство — те же, что в п. 3.2. Механизм возникновения инвариантного множества при  $p=2$  иллюстрируется примером п. 3.2.

Предположим теперь, что  $S_0^u \cap S_0^s = O \cup \left( \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i \right)$ , причем устойчивое и неустойчивое множества пересекаются трансверсально по  $\Gamma_i$ ,  $i=1, \dots, p$ . Предположим также, что поле  $v_0$  лежит на границе множества векторных полей Морса—Смейла, его неблуждающее множество конечно, гиперболично (кроме нуля), и устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических неблуждающих траекторий трансверсально пересекаются между собой и с  $S_0^u, S_0^s, W_0^u, W_0^s$ . Из следующей теоремы вытекает достижимость бифуркационной поверхности с обеих сторон.

**Теорема.** При выполнении сформулированных условий для векторного поля  $v_0$  существует такая окрестность  $U$  поля  $v_0$  в  $\chi^r(M)$ , что для любой системы  $v \in U$ , не имеющей равновесия в окрестности точки  $O$ , справедлива аксиома А и условие сильной трансверсальности Смейла.

Напомним, что векторное поле удовлетворяет аксиоме А, если его множество неблуждающих точек гиперболично и в нем плотны периодические траектории поля. Условие сильной трансверсальности состоит в следующем: устойчивые и неустойчивые многообразия всех неблуждающих траекторий пересекаются трансверсально. Подробнее о гиперболической теории см. том 2 настоящего издания.

**3.5. Главные семейства.** Построим сначала главные семейства — нормальные формы деформаций векторных полей из п. 3.2 в трехмерном фазовом пространстве; этих семейств два. Рассмотрим куб  $K_0: |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |z| \leq 1$  и векторное поле в  $K_0$ :

$$v_\varepsilon^j = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (z^2 + \varepsilon) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Склеим точки граней  $z=1$  и  $z=-1$  куба  $K_0$  двумя разными способами. Положим

- 1)  $f_0^+ : (x_1, x_2, 1) \rightarrow (x_1, x_2, -1)$ ;
- 2)  $f_0^- : (x_1, x_2, 1) \rightarrow (-x_1, -x_2, -1)$ .

Получим трехмерные многообразия  $K^+$  и  $K^-$ , гомеоморфные друг другу (и прямому произведению двумерного диска на  $S^1$ ), и векторные поля  $v_\varepsilon^+$  и  $v_\varepsilon^-$  соответственно. Легко проверяется, что:

1) при  $\varepsilon < 0$   $v_\varepsilon^\pm$  имеет в  $K^\pm$  два гиперболических положения равновесия  $O_1, O_2$ :  $\dim W_{O_1}^s = 2, \dim W_{O_2}^u = 2$ , причем  $W_{O_1}^s$  и  $W_{O_2}^u$  трансверсально пересекаются по двум гиперболическим траекториям  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ; 2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $O_1$  и  $O_2$  сливаются по траектории  $\Gamma_1$ , образуя  $O$  при  $\varepsilon = 0$ ;  $\Gamma_2$  превращается в гомоклиническую

траекторию  $\Gamma$ ; 3) при  $\varepsilon > 0$   $v_\varepsilon$  имеет седловой предельный цикл  $L_\varepsilon (x_1 = x_2 = 0)$ , который является единственной неблуждающей траекторией поля  $v_\varepsilon^\pm$  в  $K^\pm$ , причем для поля  $v_\varepsilon^+$  устойчивое и неустойчивое многообразия цикла являются цилиндрами, а для  $v_\varepsilon^-$  — листами Мёбиуса.

Теорема (о версальности). Росток однопараметрического семейства общего положения векторных полей  $\{w_\varepsilon\}$  на гомоклинической траектории негиперболической особой точки — седла по гиперболическим переменным в  $\mathbb{R}^3$  — топологически эквивалентен ростку одного из главных семейств  $\{v_\varepsilon^+\}$  или  $\{v_\varepsilon^-\}$  на гомоклинической траектории поля  $v_0^+$  или  $v_0^-$ .

Доказательство теоремы проводится с использованием техники работ [113], [32]. Для произвольного  $n$  имеет место аналог этой теоремы — главное семейство получается надстройкой гиперболического положения равновесия над  $\{v_\varepsilon^+\}$  или  $\{v_\varepsilon^-\}$ .

Аналогично строятся главные деформации уравнений, описанных в п. 3.1, и формулируется теорема об их версальности. Для каждого  $n$  главная деформация единственна.

#### § 4. Бифуркации гомоклинических траекторий негиперболического цикла

Бифуркации, названные в заглавии, приводят к возникновению инвариантных торов и бутылок Клейна, к рождению сложных инвариантных множеств со счетным числом циклов и странных аттракторов. Некоторые случаи изучены не полностью; в п. 4.11 формулируются открытые вопросы. В конце параграфа рассматривается структурная устойчивость однопараметрических семейств диффеоморфизмов.

**4.1. Структура семейства гомоклинических траекторий.** Как указывалось в § 1, точке общего положения на границе множества систем Морса—Смейла соответствует поле с гомоклинической траекторией негиперболического цикла, только если один мультипликатор этого цикла равен 1. На бифуркации такого поля существенно влияет компактность или некомпактность объединения цикла и множества его гомоклинических траекторий.

Остановимся на компактном случае; некомпактный обсуждается в п. 4.7.

**Лемма** ([30], [33]). Пусть в однопараметрическом семействе общего положения встретилось векторное поле с негиперболическим циклом, имеющим мультипликатор 1, объединение которого со всеми его гомоклиническими траекториями компактно. Тогда это объединение состоит из конечного числа (скажем,  $p$ ) непрерывных двумерных многообразий, каждое из которых гомеоморфно тору или бутылке Клейна. Если цикл — типа узел

по гиперболическим переменным, то  $p=1$ , и рассматриваемое объединение совпадает с  $S^u$  или  $S^s$  для устойчивого или неустойчивого узла соответственно.

Другое важное свойство, определяющее характер бифуркации (а также гладкость описанных в лемме многообразий), — это так называемая критичность цикла.

**4.2. Критические и некритические циклы.** Пусть гладкое векторное поле имеет предельный цикл с мультипликатором единица типа «устойчивый узел по гиперболическим переменным». Тогда некоторая окрестность цикла наделена гладким слоением со слоями коразмерности 1, инвариантным относительно потока и *сильно устойчивым*: каждый слой экспоненциально сжимается при сдвиге вдоль траекторий поля за положительное время [162], [180]. Один из слоев совпадает с устойчивым многообразием цикла. Аналогично описывается *сильно неустойчивое* слоение в случае неустойчивого узла по гиперболическим переменным.

Пусть цикл векторного поля имеет мультипликатор 1 и является седлом по гиперболическим переменным. Тогда ограничение поля на центрально устойчивое (центрально неустойчивое) многообразие  $W^{sc}(W^{uc})$  имеет цикл типа устойчивый (неустойчивый) узел по гиперболическим переменным. На многообразиях  $W^{sc}$  и  $W^{uc}$  можно определить, как и выше, *сильно устойчивое* и *сильно неустойчивое* слоения, обозначаемые через  $F^{ss}$  и  $F^{uu}$ .

**Определение ([180]).** Предельный цикл векторного поля с мультипликатором единица называется *s-критическим*, если либо существует гиперболическое положение равновесия или гиперболический цикл, чье устойчивое или неустойчивое многообразие касается одного из слоев  $F^{ss}$  на  $S^s$ , либо неустойчивое множество цикла касается одного из этих слоев. В последнем случае объединение гомоклинических траекторий цикла называется *s-критическим*. Аналогично определяются *u-критические* цикл и объединение его гомоклинических траекторий: нужно только заменить  $F^{ss}$ ,  $S^s$ ,  $S^u$  на  $F^{uu}$ ,  $S^u$  и  $S^s$ . Цикл и объединение его гомоклинических траекторий называются *критическими*, если они *s-* или *u-*критические, и *некритическими* в противном случае (рис. 42).

**Замечание.** Торы и бутылки Клейна в лемме п. 4.1 — гладкие, если объединение гомоклинических траекторий цикла некритическое; в противном случае среди них есть негладкие.

**4.3. Рождение гладкого двумерного аттрактора.** Мы используем определение аттрактора из [26, стр. 42], которое воспроизводится ниже на стр. 155. Результаты этого и следующего пунктов параллельны результатам § 3, только вместо негиперболических особых точек с собственным значением нуль бифурцируют негиперболические циклы с мультипликатором 1. В ре-

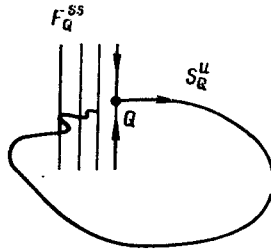


Рис. 42. Трансверсальное сечение множества гомоклинических траекторий  $s$ -критического цикла (компактный случай)

зультате вместо грубых положений равновесия рождаются грубые циклы, вместо циклов — торы или бутылки Клейна и т. д.

**Теорема ([31]).** В однопараметрическом семействе общего положения может встретиться векторное поле, обладающее следующими свойствами:

- 1°. Поле имеет негиперболический цикл  $L$  с мультипликатором 1.
- 2°. Объединение цикла и его гомоклинических траекторий не критично и компактно.
- 3°. Цикл  $L$  — устойчивый узел по гиперболическим переменным.

Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда

1°. Все поля семейства, соответствующие значениям параметра по одну сторону от нуля и достаточно близким к нулю, имеют гладкие двумерные аттракторы  $M_\epsilon^2$ , диффеоморфные тору или бутылке Клейна. При  $\epsilon \rightarrow 0$  аттрактор  $M_\epsilon^2$  стремится к объединению  $S_L^u \cup L$ , которому он гомеоморфен.

2°. Все поля семейства, соответствующие значениям параметра по другую сторону от нуля, имеют по два грубых предельных цикла и не имеют других неблуждающих траекторий и некоторой окрестности объединения множества гомоклинических траекторий цикла  $L$  с самим циклом. ▲

Случай неустойчивого узла по гиперболическим переменным сводится к предыдущему обращением времени; рождается гладкий репеллер<sup>1)</sup>, диффеоморфный тору или бутылке Клейна.

#### 4.4. Рождение сложных инвариантных множеств (некритический случай).

<sup>1)</sup> Репеллер — инвариантное множество динамической системы, превращающееся в аттрактор при обращении времени.

**Теорема.** В однопараметрическом семействе общего положения может встретиться векторное поле, обладающее свойствами 1° и 2° из теоремы п. 4.3, а также свойством

3°. Цикл  $L$  — типа седло по гиперболическим переменным, и объединение его гомоклинических траекторий связно.

Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда для семейства справедливы заключения 1° и 2° теоремы п. 4.3; только «аттрактор  $M_e^2$ » в утверждении 1° нужно заменить на «инвариантное многообразие  $M_e^2$ », оно не является ни аттрактором, ни репеллером. ▲

При бифуркации цикла, объединение гомоклинических траекторий которого не критично и состоит из  $p$  торов и бутылок Клейна ( $p > 1$ ), рождается инвариантное гиперболическое множество, содержащее счетное число двумерных инвариантных многообразий.

**Теорема.** В однопараметрическом семействе общего положения может встретиться векторное поле, обладающее свойствами 1° и 2° из теоремы п. 4.3, а также свойством

3°. Цикл  $L$  — седло по гиперболическим переменным, и объединение его гомоклинических траекторий состоит из  $p$  связанных компонент.

Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда

1°. Все поля семейства, соответствующие значениям параметра по одну сторону от нуля и достаточно близким к нулю, имеют инвариантные множества  $\Omega_e$ .

2°. Все компоненты линейной связности пространства  $\Omega_e$  двумерны. Существует взаимно однозначное отображение множества этих компонент на множество траекторий топологической схемы Бернулли из  $p$  символов. Компонента линейной связности компактна, если и только если соответствующая траектория периодична.

3°. Для семейства справедливо заключение 2° теоремы пункта 4.3. ▲

Теоремы этого пункта анонсированы в [33] для  $n=4$ .

**4.5. Критический случай.** В случае, когда объединение гомоклинических траекторий цикла с мультипликатором 1 компактно и критично, при бифуркации соответствующего поля могут возникнуть странные аттракторы.

«Теорема» ([31], [180]). В однопараметрических семействах общего положения может встретиться векторное поле (скажем,  $v_0$ ), обладающее свойствами 1° и 3° из теоремы п. 4.3; а также свойством 2°: сдвинутый цикл  $L$  и его гомоклинических траекторий является компактным и критическим; множество  $S_L^u$  касается некоторых сдвигов вполне устойчивого слоения  $F_L^{ss}$ . Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда

1°. По одну сторону от нуля имеется открытое множество с предельной точкой 0, состоящее из счетного объединения интервалов. Каждому значению  $\varepsilon$  из этого множества соответствует поле  $v_\varepsilon$  семейства, имеющее странный аттрактор  $M_\varepsilon$ . Этот аттрактор содержит счетное множество периодических траекторий и стремится к объединению  $S_L \cup L$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2°. Справедливо заключение 2° теоремы пункта 4.3. ▲

Эта теорема, в несколько иных терминах, сформулирована в [180], где дан набросок ее доказательства<sup>1)</sup>. Полное доказательство теоремы получено в [31] при дополнительном требовании на поле  $v_0$  (не повышающем коразмерности вырождения, но сужающем область рассматриваемых вырожденных полей на гиперповерхности коразмерности 1 в функциональном пространстве). Сформулируем это требование и заодно поясним механизм возникновения странного аттрактора.

Предположим для простоты, что преобразование монодромии цикла  $L$  (как функция от начальных условий и параметра) может быть продолжено в окрестность пересечения плоскости, трансверсальной к полю, и объединения гомоклинических траекторий цикла. На этой плоскости циклу соответствует неподвижная точка  $Q$  диффеоморфизма  $f_0$ , соответствующего полю  $v_0$ . Один мультипликатор этой неподвижной точки равен 1, остальные по модулю меньше 1. Объединение гомоклинических траекторий высекает на трансверсали кривую  $S_Q^u$ , которая становится замкнутой при добавлении точки  $Q$  (рис. 42). Сильно устойчивое слоение, соответствующее полю  $v_0$ , высекает на трансверсали сильно устойчивое слоение  $F_Q^{ss}$  диффеоморфизма  $f_0$ ; кривая  $S_Q^u$  касается некоторых слоев этого слоения.

Прежде чем формулировать дополнительное требование на поле  $v_0$ , приведем грубое рассуждение, подтверждающее существование аттрактора. Поскольку в некоторой окрестности точки  $Q$  диффеоморфизм  $f_0$  — сжимающий по гиперболическим переменным, существует некоторая окрестность  $U$  «гомоклинической кривой»  $S_Q^u \cup Q$ , замыкание которой  $\bar{U}$  компактно и переходит в  $U$  под действием  $f_0$ . Тогда для всех достаточно малых  $\varepsilon$ ,  $f_\varepsilon \bar{U} \subset U$ . Пересечение

$$A_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_\varepsilon^k U$$

и будет максимальным аттрактором диффеоморфизма  $f_\varepsilon$ . Ниже в этом параграфе эпитет «максимальный» опускается.

<sup>1)</sup> Аналог этой теоремы для случая седла по гиперболическим переменным (когда вместо аттрактора рождается сложное инвариантное множество) анонсирован в [33]. Отметим, что полное доказательство теоремы до сих пор не опубликовано и, по-видимому, не получено.

Предположим, что при малых  $\varepsilon > 0$  точка  $Q$  исчезает, а при  $\varepsilon < 0$  распадается на две невырожденные. Пусть  $\mathcal{w}$  — окрестность точки  $Q$ , в которой определено проектирование  $\pi: \mathcal{w} \rightarrow W_Q^c$  вдоль слоев сильно устойчивого слоя  $F_Q^{ss}$  диффеоморфизма  $f_0$  на его центральное многообразие. Окрестность  $\mathcal{w}$  делится многообразием  $W_Q^s$  на две части  $\mathcal{w}^+$  и  $\mathcal{w}^-$ , определяемые требованиями:  $\pi f_0 \mathcal{w}^+ \subset \mathcal{w}$ ,  $\pi f_0^{-1} \mathcal{w}^- \subset \mathcal{w}$ . Поскольку все точки на  $S_Q^u$  — гомоклинические, то для любой дуги  $\Gamma \subset \mathcal{w}^+$  существует такое  $k$ , что дуга  $f_0^k \Gamma$  принадлежит  $\mathcal{w}^-$ .

Дополнительное требование на  $f_0$  состоит в следующем. Существует дуга  $\Gamma \subset S_Q^u \cap \mathcal{w}$ , обладающая следующими свойствами

- 1°. Начало  $\Gamma$  переходит в конец под действием  $f_0$ .
- 2°. Существует целое  $k$  и слой  $F \subset \mathcal{w}^-$  слоя  $F^{ss}$  такие, что: область, заключенная в окрестности  $\mathcal{w}$  между слоями  $F$  и  $f_0 F$  высекает на кривой  $\Gamma' = f_0^k \Gamma$  две дуги, трансверсальные слоению  $F^{ss}$  (см. рис. 43).

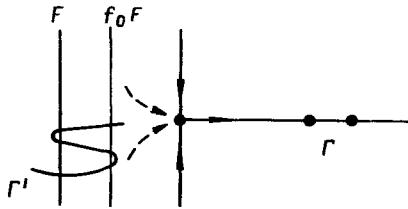


Рис. 43. Пересечение неустойчивого множества  $s$ -критического цикла со связной компонентой фундаментальной области преобразования монодромии

Поясним теперь, почему при сколь угодно малых положительных  $\varepsilon$  аттрактор  $A_\varepsilon$  бывает странным.

Рассмотрим такую окрестность  $V$  дуги  $\Gamma$ , образ которой  $V' = f_0^k V$  (являющийся окрестностью дуги  $\Gamma'$ ) целиком принадлежит  $\mathcal{w}^-$ . Для любого  $\varepsilon_0 > 0$  существует положительное  $\varepsilon < \varepsilon_0$  и целое  $N(\varepsilon)$  такие, что

- 1°. Образ  $V'' = f_\varepsilon^{N(\varepsilon)} V$  представляет собой подкову, сильно сжатую по гиперболическим переменным (при  $\varepsilon \rightarrow 0$  степень  $N(\varepsilon)$  стремится к бесконечности) и не сильно искаженную в направлении, параллельном касательной в нуле к  $W_Q^c$  (это последнее искажение оценивается равномерно по  $\varepsilon$ ).

- 2°. Существует такая последовательность интервалов на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ , стремящаяся к нулю, что для значения  $\varepsilon$  из любого из этих интервалов подкова  $V''$  пересекает область  $V$  по двум связным компонентам, образ каждой из которых при проектиро-



вании  $\pi$  содержит  $G$ . Хотя отображение  $\Phi_\varepsilon = f^{k+N(\varepsilon)}: V \rightarrow V''$  — не настоящая подкова Смейла<sup>1)</sup> (есть сжатие в одном направлении, но нет растяжения в дополнительном), можно доказать существование счетного числа циклов у диффеоморфизма  $\Phi_\varepsilon$ , а значит, и  $f_\varepsilon$ .

Тем самым, аттрактор  $A_\varepsilon$  не является одномерным многообразием.

С другой стороны, при достаточно малом  $\varepsilon$ , некоторая степень диффеоморфизма  $f_\varepsilon$  уменьшает двумерные объемы. Поэтому аттрактор  $A_\varepsilon$  не является и многообразием размерности выше 1. Следовательно, аттрактор  $A_\varepsilon$  — странный.

**4.6. Двухшаговый переход от устойчивости к турбулентности.** Можно представить себе однопараметрическое семейство векторных полей, в котором значениям параметра меньше первого критического соответствуют поля с глобально устойчивой особой точкой. При прохождении первого критического значения рождается устойчивый предельный цикл; при прохождении второго критического значения этот цикл исчезает, как описано в п. 4.5. При этом рождается странный аттрактор и наступает хаос.

Здесь рассматриваются только бифуркации, заметные для «физического наблюдателя», который видит только перестройки устойчивых (установившихся) режимов.

**4.7. Некомпактное множество гомоклинических траекторий.** Всюду в этом пункте цикл  $L$  — узел по гиперболическим переменным, для определенности — устойчивый.

Будем предполагать, что векторное поле, имеющее цикл с мультипликатором 1 и с некомпактным объединением множества гомоклинических траекторий с  $L$ , удовлетворяет следующим условиям общности положения: его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических положений равновесия и гиперболических, кроме  $L$ , циклов, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально между собой и с  $S_L^u, S_L^s, W_L^s, W_L^u$ , последние пересекаются трансверсально в каждой точке, не принадлежащей  $L$ .

Следующая лемма доказывается аналогично [198].

**Лемма.** При сформулированных предположениях векторное поле  $v_0$  имеет контур  $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ , содержащий  $L=Q_j$  и такой, что устойчивые и неустойчивые множества элементов контура пересекаются трансверсально (случай 2, п. 1.5).

Переобозначим элементы контура так, чтобы  $L=Q_0(=Q_k)$ . Из трансверсальности пересечений многообразий и  $\lambda$ -леммы несложно вывести.

**Следствие.** Для любого семейства векторных полей  $\{v_\varepsilon\}$ , пересекающего бифуркационное множество в точке  $v_0$  и не имею-

<sup>1)</sup> О подкове Смейла см. том 2 настоящего издания, стр. 131.

щего при  $\varepsilon > 0$  предельных циклов в окрестности  $L$ , существует  $(k-1)$  последовательностей  $\{\varepsilon_i^s\}$   $i \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $\varepsilon_i^s \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , таких, что при  $\varepsilon = \varepsilon_i^s$  векторное поле  $v_\varepsilon$  имеет гомоклиническую траекторию положения равновесия или цикла  $Q_s$ .

Будем говорить, что имеет место случай В, если  $k=2$ , и  $Q_1$  — положение равновесия типа седло либо с ведущим устойчивым направлением, отвечающим вещественному собственному числу, либо, в противном случае, с отрицательной седловой величиной (см. п. 5.1). Во всех других случаях будем говорить, что имеет место случай А.

Из предыдущего следствия вытекает

**Теорема ([28]).** Если имеет место случай А, то на отрезке  $(0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0$  — достаточно мало, существует  $(k-1)$  последовательностей интервалов  $\{\delta_i^s\} \subset \mathbb{N}$ ,  $s \in \{1, \dots, k-1\}$ , стягивающихся к нулю при  $i \rightarrow \infty$  таких, что при  $\varepsilon \in \delta_i^s$  векторное поле  $v_\varepsilon$  имеет счетное множество седловых предельных циклов.

**Следствие.** Предположим, что в дополнение к условиям теоремы выполнено следующее условие: для любого положения равновесия или цикла  $Q$  такого, что  $S_L^u \cap W_Q^s \neq \emptyset$ , имеет место включение  $W_Q^u \setminus Q \subset S_L^s$ . Тогда при  $\varepsilon \in \delta_i^s$  векторное поле  $v_\varepsilon$  имеет странный аттрактор в окрестности  $\bar{S}_L^u$ , стремящийся к этому множеству при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Случай В, насколько нам известно, не исследован.

**4.8. Перемежаемость.** Предположим, что выполнены условия предыдущего следствия, либо условия теоремы п. 4.5, т. е. у векторного поля  $v_\varepsilon$  существует странный аттрактор для  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим произвольную непрерывную функцию  $\psi(x)$  на фазовом пространстве. Пусть  $x=x(t)$  — траектория, принадлежащая странному аттрактору. Тогда график функции  $\psi(x(t))$  в общем случае имеет следующий вид: длинный дуг близких к периодическим осцилляциям — на этом интервале времени изображающая точка находится в малой окрестности исчезнувшего цикла — затем «турбулентный» всплеск, затем снова интервал периодичности и т. д. Такой режим был назван в [170] *перемежаемостью*. Перемежаемость свидетельствует о бифуркации возникновения странного аттрактора при исчезновении полуустойчивого цикла и часто встречается в моделях реальных процессов (см., например [63], [171]).

Кроме перечисленных случаев, перемежаемость может быть обусловлена исчезновением цикла с мультипликатором 1, узлового по гиперболическим переменным, имеющего гомоклиническую траекторию, принадлежащую  $W^s$  (векторное поле в этом случае уже не принадлежит границе множества систем Морса—Смейла, см. [81]).

**4.9. Достижимость, недостижимость.** Пусть  $v_0$  — векторное поле общего положения (т. е. удовлетворяющее условиям, анало-

гичным сформулированным в начале п. 4.7) на границе множества систем Морса—Смейла  $B_1$ , имеющее негиперболический цикл  $L$ . Предположим, что имеет место одна из следующих возможностей: 1)  $L$ —цикл с мультипликатором  $(-1)$ ; 2)  $L$ —цикл с парой не вещественных мультипликаторов (напомним, см. п.п. 1.4, 1.6, что в случаях 1) и 2)  $L$  не входит в состав контура, и не имеется двойкоасимптотических к  $L$  траекторий, отличных от  $L$ ); 3)  $L$ —цикл с мультипликатором  $+1$ , и либо: (3a),  $S_L^u \cap S_L^s = L$  (нет гомоклинических траекторий цикла  $L$ ), либо (3b)  $S_L^u \cap S_L^s$ —бутылка Клейна, гладко вложенная в фазовое пространство, либо (3c)  $S_L^u \cap S_L^s$ —гладкий тор.

**Лемма.** При выполнении сформулированных условий в окрестности  $v_0$  в  $\chi^r(M)$  всюду плотны системы Морса—Смейла.

Эта лемма следует из теоремы Купки—Смейла [138] и из всюду плотности систем Морса—Смейла на торе и бутылке Клейна.

Остается решить вопрос о достижимости или недостижимости бифуркационной поверхности и, в последнем случае, определить бифуркации, которыми недостижимость обусловлена.

**Утверждение.** В случае 1) пересечение  $B_1 \cap \mathfrak{A}$  связно, где  $\mathfrak{A} \subset \chi^r(M)$  — шар достаточно малого диаметра с центром в  $v_0$ , и все векторные поля в  $\mathfrak{A} \setminus B_1$  являются полями Морса—Смейла.

Как следствие получаем достижимость с обеих сторон  $B_1$  в точке  $v_0$ .

Утверждение легко следует из некоторого варианта теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от параметров, вытекающего, например, из [162].

В случае 2) после рождения тора «почти» для любого однопараметрического семейства векторных полей при изменении параметра число вращения меняется, следовательно, происходит бесконечное множество бифуркаций. Однако есть семейства, для которых при изменении параметра число вращения на торе не меняется — бифуркационная поверхность может быть и достижимой.

В случае 3) информацию о достижимости соберем в следующую таблицу, детализирующую часть общей таблицы 2 пункта 1.8.

Здесь через  $W_1^s$  и  $W_2^u$  обозначены устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических положений равновесия или циклов. Поясним, из-за чего может возникать недостижимость в случае (3a) на рис. 44, где изображен диффеоморфизм двумерного диска, имеющий при  $\varepsilon=0$  неподвижную точку  $Q$  с мультипликатором 1, и два седла  $Q_1, Q_2$ , причем  $S_Q^u$  трансверсально пересекается с  $W_{Q_2}^s$ , а  $W_{Q_1}^u$  содержит точку  $P$  простого касания со слоем слое-

Таблица 2

Подкласс		Достижимость
(3a) $S_L^s \cap S_L^u = L$	$s$ -критический цикл, и $S_L^u \cap W_1^u \neq \emptyset$ , $\dim W_1^s < n$ , или $u$ -критический, и $S_L^s \cap W_2^u \neq \emptyset$ , $\dim W_2^u < n$	+ —
	остальные случаи	+ +
(3b) $S_L^s \cap S_L^u = K^2$	некритический	+ +
	критический	+ —
(3c) $S_L^u \cap S_L^s = T^2$		+ —

ния  $F_Q^{ss}$ . При  $\varepsilon > 0$  окрестность  $P$  диффеоморфно отображается в окрестность точки на  $W_{Q_2}^s$  и, при подходящем выборе  $\varepsilon$ ,  $W_{Q_2}^u$  и  $W_{Q_1}^s$  имеют точку простого касания.

В случае (3c) недостижимость связана с изменением числа вращения на возникшем торе, а в случае (3b) — с возникновением точек простого касания устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических циклов на бутылке Клейна и «далеких» положений равновесия или циклов.

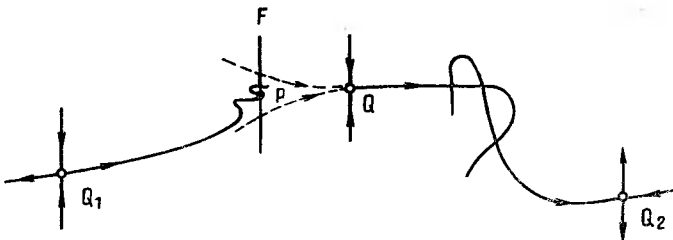


Рис. 44. Неподвижные точки и инвариантные кривые диффеоморфизма диска, принадлежащего недостижимой части бифуркационной поверхности

**4.10. Устойчивость семейств диффеоморфизмов.** В работах [178]—[180] исследовались общие свойства однопараметрических семейств диффеоморфизмов, были сформулированы раз-

личные определения устойчивости и установлены необходимые и (или) достаточные условия различных типов устойчивости, некоторые из которых были доказаны. Изложение следует работе [180].

Пусть  $M$  — компактное  $C^\infty$ -гладкое многообразие без края,  $\text{Diff}(M)$  — множество  $C^\infty$ -диффеоморфизмов,  $MS$  — множество диффеоморфизмов Морса—Смейла,  $\mathcal{P}(M)$  — множество  $C^\infty$  дуг диффеоморфизмов  $M$ . То есть если  $I$  — единичный интервал, то  $\mathcal{P}(M)$  состоит из  $C^\infty$ -отображений  $\Phi: M \times I \rightarrow M \times I$  таких, что  $\Phi(t, \varepsilon) = (\varphi_\varepsilon(t), \varepsilon)$ , где  $t \mapsto \varphi_\varepsilon(t)$  —  $C^\infty$ -диффеоморфизм для каждого  $\varepsilon \in I$ . Элементы  $\mathcal{P}(M)$  будем называть однопараметрическими семействами диффеоморфизмов или *дугами диффеоморфизмов*.

Для каждой дуги  $\{\varphi_\varepsilon\} \subset \mathcal{P}$  с  $\varphi_0 \in MS$  пусть  $b(\varphi) = \inf \{\varepsilon \in I, \varphi_\varepsilon \in MS\}$ . Будем считать, что  $b(\varphi) < 1$ . Если дуги  $\{\varphi_\varepsilon\}, \{\varphi'_\varepsilon\} \subset \mathcal{P}$ , то будем говорить, что  $(h, \{H_\varepsilon\})$  — сопряженность между ними, если  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  — гомеоморфизм, такой что  $h(b(\varphi)) = b(\varphi')$ ,  $H_\varepsilon: M \rightarrow M$  — гомеоморфизм, сопрягающий  $\varphi_\varepsilon$  и  $\varphi'_{h(\varepsilon)}$  для всех  $\varepsilon$  в некоторой окрестности  $[0, b(\varphi)]$ , и  $H_\varepsilon$  непрерывно зависит от  $\varepsilon$ . Если гомеоморфизм  $H_\varepsilon$  сопрягает  $\varphi_\varepsilon$  и  $\varphi'_\varepsilon$  лишь для  $\varepsilon \leq b(\varphi)$  и не обязан быть непрерывным по  $\varepsilon$ , то говорят, что  $(h, \{H_\varepsilon\})$  — левая сопряженность для  $\{\varphi_\varepsilon\}, \{\varphi'_\varepsilon\}$ . Сопряженность и левая сопряженность определяют отношения эквивалентности в множестве дуг в  $\mathcal{P}$ , начинающихся с диффеоморфизмов Морса—Смейла. Дуга  $\{\varphi_\varepsilon\} \in \mathcal{P}$  называется *устойчивой* или *левоустойчивой*, если она внутренняя точка соответствующего класса эквивалентности.

Обозначим через  $v(\varphi)$  векторное поле, порождающее поток, являющийся надстройкой над диффеоморфизмом  $\varphi$ . Обозначим через  $R$  множество дуг  $\{\varphi_\varepsilon\}$  в пространстве диффеоморфизмов, таких что  $v(\varphi_\varepsilon) \in B_1$ ,  $v(\varphi_\varepsilon)$  трансверсально пересекает  $B_1$  в точке  $v(\varphi_\varepsilon)$ ;  $v(\varphi_\varepsilon)$  удовлетворяет условиям типичности, главное из которых состоит в следующем. Неблуждающее множество  $v(\varphi_\varepsilon)$  состоит из конечного множества циклов, причем если один из них не гиперболический, то его устойчивые и неустойчивые множества и многообразия трансверсально пересекаются между собой и с многообразиями других циклов, а если все циклы гиперболически, то их многообразия трансверсально пересекаются по всем траекториям, за исключением одной.

В [180] наложены еще некоторые технические условия на локальное поведение траекторий в окрестностях гиперболических точек, не нарушающие общности положения, но сужающие рассматриваемый класс дуг. Здесь мы их не формулируем, но предполагаем выполненными.

**Теорема 1.** 1) Дуга  $\{\varphi_\varepsilon\} \in R$  левоустойчива тогда и только тогда, когда  $v(\varphi_\varepsilon)$  имеет негиперболический предельный цикл.

2) Дуга  $\{\varphi_\varepsilon\}$  устойчива тогда и только тогда, когда: а)  $\{\varphi_\varepsilon\}$  — левоустойчива, б)  $v(\varphi_b)$  не имеет цикла с парой невестественных мультипликаторов, с) если  $v(\varphi_b)$  имеет цикл с мультипликатором 1, то этот цикл не критический, не входит в состав контура и не имеет гомоклинических траекторий.

**Теорема 2.** Пусть  $\{\varphi_\varepsilon\}$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , — дуга диффеоморфизмов такая, что предельное множество каждого диффеоморфизма  $\varphi_\varepsilon$  состоит лишь из конечного множества траекторий. Тогда  $\{\varphi_\varepsilon\}$  устойчива в том и только том случае, если на  $[0, 1]$  существует лишь конечное множество бифуркационных значений, скажем,  $b_1, \dots, b_k$ , и для каждого  $i \in \{1, \dots, k\}$  справедливы следующие утверждения:

а)  $v(\varphi_{b_i}) \in B_1$  и не имеет цикла с парой невестественных мультипликаторов; б)  $v(\varphi_\varepsilon)$  трансверсально пересекает  $B_1$  в точке  $v(\varphi_{b_i})$ ; с) если  $v(\varphi_{b_i})$  имеет цикл с мультипликатором 1, то этот цикл не критический, не входит в состав контура и не имеет гомоциклических траекторий.

Такие ограничительные условия устойчивости связаны с существованием числовых инвариантов топологической эквивалентности — модулей, возникающих при нетрансверсальном пересечении устойчивых и неустойчивых многообразий (см. ниже § 6).

**4.11. Некоторые открытые вопросы.** Перечислим некоторые задачи о бифуркациях коразмерности 1 векторных полей Морса—Смейла, связанных с нарушением гиперболичности циклов.

1. Исследовать бифуркации векторных полей, имеющих контур, в состав которого входит лишь цикл с мультипликатором 1 и седло либо с вещественным устойчивым ведущим направлением, либо с комплексным, но с отрицательной седловой величиной (случай В п. 4.7).

2. Дать возможно полное описание бифуркаций векторных полей, имеющих критический цикл, узловой по гиперболическим переменным с мультипликатором 1 и компактным множеством гомоклинических траекторий. Для одномерного аналога этой задачи некоторые результаты имеются в [180], где используется язык нидинг-последовательностей и множеств вращения.

3. Исследовать бифуркации векторных полей, имеющих критический цикл с мультипликатором 1, седловой по гиперболическим переменным, хотя бы в случае компактного множества гомоклинических траекторий.

**З а м е ч а н и е.** Все бифуркации в § 4 глобальны — мы заранее не знаем конечного множества траекторий, в окрестности которого осуществляются бифуркационные явления.

## § 5. Гиперболические особые точки с гомоклинической траекторией

В этом параграфе описаны бифуркации при переходе через гиперповерхность в функциональном пространстве, состоящую из векторных полей с гиперболической особой точкой, имеющей гомоклиническую траекторию. Исследуется окрестность точек общего положения на этой гиперповерхности как принадлежащих, так и не принадлежащих границе множества систем Морса—Смейла.

**5.1. Предварительные понятия: ведущие направления и седловые величины.** Рассмотрим росток  $v(x) = Ax + \dots$  гладкого векторного поля в гиперболической особой точке  $O$  типа седло,  $\dim W_0^s = s > 0$ ,  $\dim W_0^u = u > 0$ .

Расположим собственные значения  $\{\lambda_j, \mu_k\}$  оператора  $A$  так, что

$$\operatorname{Re} \lambda_s \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_1 < 0 < \operatorname{Re} \mu_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \mu_u.$$

Сумма  $\sigma = \operatorname{Re} \lambda_1 + \operatorname{Re} \mu_1$  называется *седловой величиной* роста (и соответствующей особой точки  $O$ ).

Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_r > \operatorname{Re} \lambda_{r+1}$ , то инвариантное подпространство оператора  $A$ , соответствующее собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , называется *ведущим устойчивым направлением* роста в особой точке; аналогично определяется *ведущее неустойчивое направление*. Название объясняется тем, что почти все фазовые кривые уравнения  $\dot{x} = v(x)$  с началом на устойчивом многообразии особой точки  $O$  входят в особую точку, касаясь ведущего устойчивого направления; исключение составляют кривые, заполняющие подмногообразие меньшей размерности, чем  $W_0^s$ . Для линейного уравнения это очевидно, для нелинейного доказано в [186].

**5.2. Бифуркации гомоклинических траекторий седла, происходящие на границе множества систем Морса—Смейла.** В однопараметрических семействах общего положения встречаются векторные поля с гомоклинической траекторией гиперболического седла, не устранимые малым шевелением семейства. Будем считать, что в однопараметрических семействах такие поля соответствуют нулевому значению параметра (называемому также критическим значением).

**Теорема ([109], [112]).** Пусть в однопараметрическом семействе общего положения нулевому значению параметра соответствует дифференциальное уравнение с гомоклинической траекторией гиперболического седла, удовлетворяющее одному из следующих условий:

1. Седловая величина отрицательна и ведущее неустойчивое направление одномерно.
2. Седловая величина положительна и ведущее устойчивое направление одномерно.

Тогда все некритические векторные поля семейства, достаточно близкие к критическому, в некоторой окрестности гомоклинической траектории задают системы Морса—Смейла не более чем с двумя неблуждающими траекториями, одна из которых — особая точка поля. Векторные поля семейства, соответствующие значениям параметра по одну сторону от нуля, не имеют других неблуждающих траекторий; соответствующие значениям параметра по другую сторону от нуля имеют предельный цикл. Размерность устойчивого многообразия этого цикла на единицу превышает размерность устойчивого многообразия седла или совпадает с ней, в зависимости от того, отрицательна или положительна седловая величина  $\sigma$ . ▲

З а м е ч а н и я. 1. Утверждение теоремы для  $\sigma > 0$  получается из утверждения для  $\sigma < 0$  обращением времени.

2. В случае общего положения ведущее направление либо одномерно (тогда ему соответствует вещественное собственное значение), либо двумерно (и тогда ему соответствует пара комплексно сопряженных собственных значений). Будем говорить, что в первом случае ведущее направление *вещественно*, а во втором — *комплексно*.

Из теоремы вытекает, что при выполнении ее условий бифуркационная поверхность  $B_1$  достижима в точке общего положения с обеих сторон.

**5.3. Требования общности положения.** Чтобы для однопараметрического семейства векторных полей выполнялось утверждение предыдущей теоремы, это семейство должно удовлетворять следующим требованиям общности положения. Первые три требования налагаются на векторное поле, соответствующее критическому значению параметра.

1°. Ведущее направление, устойчивое в первом случае ( $\sigma < 0$ ) и неустойчивое во втором ( $\sigma > 0$ ) либо вещественно и одномерно, либо комплексно и двумерно.

2°. Гомоклиническая траектория входит в особую точку при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ , касаясь ведущих направлений.

Чтобы сформулировать третье требование, понадобятся некоторые сведения об уравнении в вариациях вдоль гомоклинической траектории седла. Пусть

$$\dot{x} = v(x), \quad v(0) = 0, \quad v_*(0) = A$$

— уравнение, соответствующее критическому значению параметра,  $\varphi(t)$  — гомоклиническая траектория седла  $O$ ;  $\varphi(0) = x$ ,  $X$  — операторнозначное решение уравнения в вариациях по начальному условию:

$$\dot{X} = (v_* \circ \varphi(t)) X(t); \quad X(0) = E.$$

**Предложение.** Для каждого ненулевого вектора  $\xi \in T_x \mathbb{R}^n$  существуют пределы



$$\lambda_+(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |X(t)\xi|}{t}, \quad \lambda_-(\xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln |X(t)\xi|}{t}.$$

Каждый из этих пределов равен вещественной части одного из собственных значений оператора  $A$  (и называется характеристическим показателем Ляпунова для уравнения в вариациях). Множество векторов  $\xi$ , задаваемых любым из неравенств  $\lambda_+(\xi) \leq \lambda$  и  $\lambda_-(\xi) \leq \lambda$ , представляет собой плоскость без 0. Размерность этой плоскости такая, как если бы в определении характеристических показателей Ляпунова вместо  $X(t)$  стояло  $\exp At$ .

З а м е ч а н и я 1. Это предложение очевидно, если росток поля в точке  $O$  гладко эквивалентен своей линейной части, и доказано в [51] для произвольного ростка.

2. Пусть ведущее неустойчивое направление поля  $v$  в точке  $O$  вещественно и одномерно. Тогда плоскости

$$L_-(x) = \{\xi \in T_x \mathbb{R}^n \mid \lambda_+(\xi) \leq \lambda_1\},$$

$$L_+(x) = \{\xi \in T_x \mathbb{R}^n \mid \lambda_-(\xi) \leq -\lambda_1\}$$

имеют размерности  $s$  и  $u-1$  соответственно. Отметим, что

$$L_-(x) = T_x W_0^s \text{ и } L_+(x) \supset T_x W_0^u.$$

3°. Третье требование общности положения на поле  $v$  при  $\sigma < 0$ . Пусть  $x$  — точка гомоклинической траектории. Требуется, чтобы плоскости  $L_-(x)$  и  $L_+(x)$  пересекались трансверсально (то есть по прямой, порожденной вектором  $v(x)$ ).

При  $\sigma > 0$  третье требование на векторное поле получается из предыдущего обращением времени.

Четвертое требование налагается на семейство полей, обозначенное ниже  $\{v_\varepsilon\}$ ;  $v_0 = v$ .

4. Рассмотрим точку  $x$  гомоклинической траектории и росток  $(n-1)$ -мерной плоскости  $\Pi$  в этой точке, трансверсальный полю  $v_x$  при малых  $\varepsilon$ . Устойчивое многообразие  $W_\varepsilon^s$  и неустойчивое  $W_\varepsilon^u$  особой точки  $O$  поля  $v_\varepsilon$  пересекают  $\Pi$  по подмногообразиям суммарной размерности  $n-2$ . При  $\varepsilon = 0$  эти многообразия пересекаются в точке  $x$ .

Требование общности положения состоит в том, что при отклонении  $\varepsilon$  от нуля эти многообразия расходятся на расстояние порядка  $\varepsilon$ .

З а м е ч а н и е. Требование 4 можно ослабить и теорема пункта 5.2 останется справедливой — это следует из теоремы п. 5.5.

5.4. Главные семейства в  $\mathbb{R}^3$  и их свойства. В этом пункте строятся «топологические нормальные формы семейств в окрестности гомоклинической траектории седла в  $\mathbb{R}^3$ .» Соответствующие теоремы версальности формулируются в п. 5.5. Семейства строятся с помощью описанных ниже склеек из линей-

ного и стандартных векторных полей. Будем считать, что устойчивое многообразие  $W^s$  линейного поля двумерно, случай  $\dim W^s=1$  сводится к этому обращением времени. Семейств будет 4: они различаются знаком седловой величины и топологией инвариантного многообразия, полученного продолжением  $W^s$ .

Обозначим через  $K_1$  и  $K_2$  два экземпляра куба  $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ . В кубе  $K_1$  рассмотрим векторные поля  $v^-$  и  $v^+$ :

$$v^- = -4y \frac{\partial}{\partial y} - 3x \frac{\partial}{\partial x} + 2z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \sigma = -1,$$

$$v^+ = -4y \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial x} + 2z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \sigma = 1.$$

В кубе  $K_2$  рассмотрим поле  $v_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}$ .

Рассмотрим следующие отображения склейки:

$$f: (-1, y, z) \rightarrow (1, y, z),$$

$$f^\pm: (x, y, 1) \rightarrow (1, \pm y, \pm x).$$

Склеим пары точек  $P \in K_2$  и  $f(P) \in K_1$ , а также  $Q \in K_1$  и  $f^\pm(Q) \in K_2$  (рис. 45). На множестве внутренних точек из каждого из полученных пространств можно задать структуру гладкого многообразия так, что полученные поля будут гладкими. Обозначим эти многообразия  $M^+$  и  $M^-$  ( $M^\pm$  получено с помощью  $f^\pm$ ).

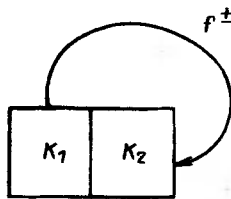


Рис. 45. Построение многообразий  $M^\pm$

Семейство полей  $v_\varepsilon^{++}$  на  $M^+$ , соответствующих  $(v^+, v_\varepsilon)$ , обозначим  $V^{++}$ ;  $(v^-, v_\varepsilon)$  на  $M^+ - V^{-+}$ ;  $(v^+, v_\varepsilon)$  на  $M^- - V^{+-}$ ;  $(v^-, v_\varepsilon)$  на  $M^- - V^{--}$ . Многообразия  $M^+$  и  $M^-$  с полями на них могут быть гладко вложены в  $\mathbb{R}^3$ . Четыре семейства  $V^{++}, \dots, V^{--}$  и называются главными. Поля семейств  $V^{++}, \dots, V^{--}$ , соответствующие  $\varepsilon=0$ , имеют гомоклиническую траекторию, склеенную из кусков координатных осей  $Ox$  и  $Oz$ . На двумерной трансверсали

$$D_h = \{(x, y, z) \mid x=1, |y| \leq 1, 0 < z < h\} \subset K_1$$

при достаточно малых  $h$  и  $\varepsilon$  определено отображение последования поля каждого из главных семейств: точка  $P \in D_h$  переходит

в точку первого возвращения на грань  $x=1$  куба  $K_1$  положительной полутраектории с началом  $P$  поля главного семейства, соответствующего параметру  $\varepsilon$ . Соответствующие преобразования монодромии обозначаются  $\Delta_\varepsilon^{++}, \dots, \Delta_\varepsilon^{--}$ . Вычислим эти преобразования.

Обозначим через  $\Delta^+$  (или  $\Delta^-$ ):  $\Gamma_h \rightarrow \{z=1\}$  отображение соответствия для поля  $v^+$  (или  $v^-$ ), переводящее точку  $P \in D_h$  в точку на грани  $z=1$ , через которую положительная полутраектория поля с началом  $P$  выходит из куба  $K_1$ . Пусть  $\Delta_\varepsilon$  — отображение грани  $x=1$  куба  $K_2$  в плоскость  $x=-1$  вдоль траекторий поля  $v_\varepsilon$ :  $\Delta_\varepsilon(1, y, z) = (-1, y, z + \varepsilon)$ . Отображение  $\Delta_\varepsilon^{++}$  имеет вид (см. рис. 45, 46)

$$\Delta_\varepsilon^{++} = f \circ \Delta_\varepsilon \circ f^+ \circ \Delta^+.$$

Имеем

$$\Delta^\pm(1, y, z) = (z^{v^\pm}, yz^2, 1), \quad v^- = \frac{3}{2}, \quad v^+ = \frac{1}{2},$$

$$\Delta_\varepsilon^{++}(1, y, z) = \left(1, yz^2, z^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\right).$$

Аналогично

$$\Delta_\varepsilon^{+-}(1, y, z) = \left(1, -yz^2, -z^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\right),$$

$$\Delta_\varepsilon^{-+}(1, y, z) = \left(1, yz^2, z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\right),$$

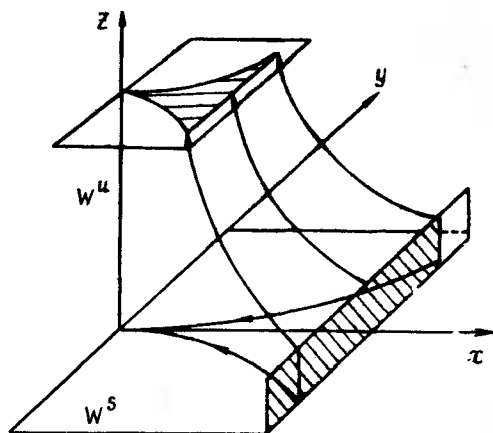
$$\Delta_\varepsilon^{--}(1, y, z) = \left(1, -yz^2, -z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\right).$$

При достаточно малых  $h$  отображения  $\Delta_\varepsilon^{-+}, \Delta_\varepsilon^{--}$  сжимающие, а отображения  $\Delta_\varepsilon^{++}, \Delta_\varepsilon^{+-}$  «гиперболические» — они растягивают в направлении  $z$  и сжимают в направлении  $y$ . Отсюда можно вывести следующие результаты:

1. Поля  $V^{-+}, V^{--}$  при  $\varepsilon > 0$  имеют устойчивый предельный цикл  $L^-(\varepsilon)$ , а при  $\varepsilon < 0$  — не имеют. Неблуждающее множество  $V^{-+}, V^{--}$  состоит из особой точки  $O$  при  $\varepsilon < 0$ ,  $O \cup L^-(\varepsilon)$  при  $\varepsilon > 0$  и  $O \cup \Gamma$  при  $\varepsilon = 0$ ,  $\Gamma$  — гомоклиническая кривая.

2. Поля  $V^{++}, V^{+-}$  имеют седловой предельный цикл  $L^+(\varepsilon)$  с двумерными устойчивым и неустойчивым многообразиями при  $\varepsilon < 0$ ,  $\varepsilon > 0$  соответственно, причем для  $V^{++}$  ( $v^{+-}$ ) устойчивое и неустойчивое многообразия гомеоморфны цилиндрам (листам Мёбиуса). Никаких неблуждающих траекторий, кроме  $O$  и цикла  $L^+(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \neq 0$  и гомоклинической траектории  $\Gamma$  при  $\varepsilon = 0$ , поля  $V^{++}, V^{+-}$  не имеют.

3. Аналогичные утверждения верны для однопараметрических семейств гладких векторных полей, достаточно  $C^1$ -близких в  $K_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  к главным семействам.



a

$\varepsilon < 0$				
$\varepsilon = 0$				
$\varepsilon > 0$				
$\delta$	$\Delta_{\varepsilon}^{-+}$	$\Delta_{\varepsilon}^{++}$	$\Delta_{\varepsilon}^{--}$	$\Delta_{\varepsilon}^{+-}$

Рис. 46 а. Отображение соответствия для гиперболического седла. б. Образ и прообраз отображения последования, соответствующего гомоклинической траектории седла

Для главных семейств существование циклов полей  $v_{\varepsilon}$  (или, что то же, неподвижных точек отображений последования) исследуется элементарно, поскольку отображения  $\Delta_{\varepsilon}$  сохраняют  $y$ -координату лишь при  $y=0$ , следовательно, достаточно изучить одномерные отображения  $\Delta_{\varepsilon}|_{y=0}$ . Графики этих отображений и их неподвижные точки показаны на рис. 47.

### 5.5. Версальность главных семейств.

Теорема. Росток однопараметрического семейства общего положения векторных полей  $\{v_{\varepsilon}\}$  на гомоклинической траектории гиперболического седла в  $\mathbb{R}^3$  с вещественными одномерными

ми ведущими направлениями в седле (может быть, после обращения времени) топологически эквивалентен росту одного из главных семейств  $V^{++}, \dots, V^{--}$  на гомоклинической траектории поля  $v_0^{++}, \dots, v_0^{--}$ .

Главные семейства векторных полей в  $\mathbb{R}^n$  с гиперболическим седлом, у которого ведущее устойчивое и неустойчивое направления одномерны (и, следовательно, вещественны) и при  $\varepsilon=0$  имеется гомоклиническая траектория, получаются из опи-

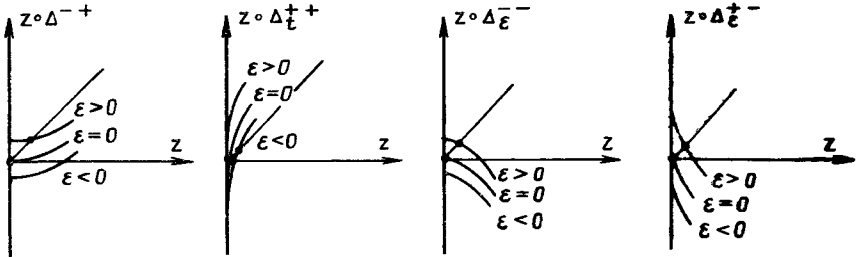


Рис. 47. Графики факторизованных преобразований монодромии в главных семействах

санных выше (при  $n=3$ ) надстройкой седла и исследуются аналогично: для произвольного  $n$  верен аналог предыдущей теоремы.

**5.6. Седло с комплексным ведущим направлением в  $\mathbb{R}^3$ .** Все семейства, описанные в теореме пункта 5.2, имеют одинаковые неблуждающие траектории. Однако топологической эквивалентности семейств в случае комплексного ведущего направления препятствует наличие числового модуля. Опишем его для систем в  $\mathbb{R}^3$ .

**Теорема (В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, 1985 г.).** Пусть гладкое векторное поле в  $\mathbb{R}^3$  имеет гомоклиническую траекторию гиперболического седла с собственными значениями  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha \cdot \lambda < 0$ . Тогда отношение  $\alpha/\lambda$  является топологическим инвариантом.

◀ **1°.** Заменой времени добиваемся равенства  $\lambda=1$ ; докажем, что  $\alpha$  — топологический инвариант. Рассмотрим преобразование монодромии  $\Delta$  гомоклинической траектории седла  $\gamma$ . Для этого выберем произвольную точку  $P \in \gamma$  ( $Q \in \gamma$ ) достаточно близко к седлу на его устойчивом двумерном многообразии  $W^s$  (неустойчивом одномерном многообразии  $W^u$ ). Требования близости формулируются ниже. Многообразие  $W^s$  делит окрестность седла на две части. Ту часть, в которую траектория  $\gamma$  входит при  $t \rightarrow -\infty$ , обозначим  $U^+$ . Возьмем две трансверсальные гладкие двумерные площадки  $G \ni P$  и  $G' \ni Q$  (рис. 48a). Обозначим через  $\Gamma^+$  пересечение  $U^+ \cap G$ . Если площадка  $G^+$  достаточно мала, то определено отображение соответствия  $\Delta_1: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma'$ ; точка  $P \in \Gamma^+$  переходит в конец дуги фазовой кривой рассматри-

ваемого поля с началом  $P$  и концом на  $\Gamma'$ , расположенной целиком в  $U^+$  (рис. 48а). Пусть  $f: (\Gamma', Q) \rightarrow (\Gamma, P)$  — росток преобразования монодромии (отображения последования), соответствующего дуге гомоклинической траектории  $\gamma$  с началом  $Q$  и концом  $P$ . Очевидно,  $f$  — росток диффеоморфизма. Росток преобразования монодромии  $\Delta: (\Gamma^+, P) \rightarrow (\Gamma, P)$  равен произведению ростков  $f \circ \Delta_1$ . Можно считать, что представитель ростка  $\Delta_1$  (обозначаемый тем же символом) определен на площадке  $\Gamma^+$ , и его образ принадлежит площадке  $\bar{\Gamma} \ni \Gamma$ .

2°. Воспользуемся следующей теоремой Белицкого [39].

Пусть гладкое векторное поле имеет гиперболическое седло с собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и пусть не выполнено ни одно из соотношений  $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j + \operatorname{Re} \lambda_k$ . Тогда росток поля в седле  $C^1$ -эквивалентен своей линейной части.

Рассматриваемое поле удовлетворяет условию теоремы Белицкого, поскольку вещественные части собственных значений седла равны  $\alpha, \alpha, 1$ ;  $\alpha < 0$ . Следовательно, существует  $C^1$ -гладкая карта  $(x, y, z)$  в некоторой окрестности  $U$  седла, линеаризующая наше поле. В этой карте  $W^s$  задается уравнением  $z=0$ , а  $W^u$  — уравнениями  $x=y=0$ . Пусть  $P \in U, Q \in U$  (требование близости точек  $P$  и  $Q$  к седлу). Растяжением осей добиваемся равенств

$$x(P)=1, \quad (x, y, z)(Q)=(0, 0, 1).$$

Пусть площадки  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  лежат в плоскостях  $\Pi_1: x=1$  и  $\Pi_2: z=1$  соответственно, с картами  $(y, z)|_{\Pi_1}$  и  $(x+iy)|_{\Pi_2}$ . В этих координатах

$$\Delta_1(1+iy, z) = (z^{-(\alpha+i\beta)} \cdot (1+iy), 1). \quad (1)$$

Действительно, время перехода точки  $(1, y, z)$  на площадку  $\Pi_2$  равно  $\ln \frac{1}{z}$ , а преобразование фазового потока линейной системы

$$(x+iy)' = (\alpha+i\beta)(x+iy), \quad \dot{z} = z$$

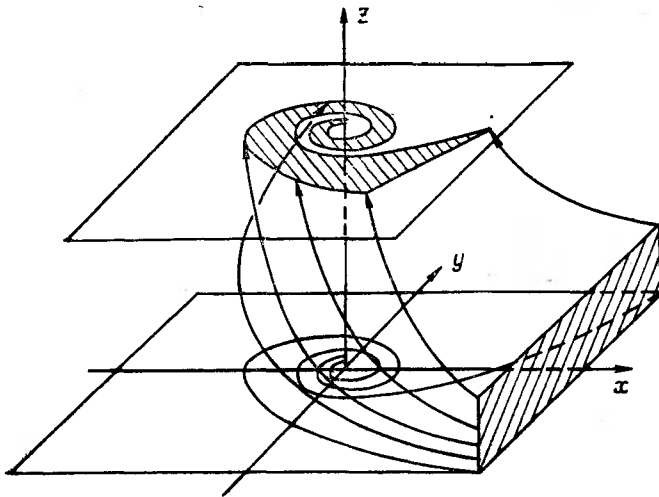
имеет вид

$$g^t(x, y, z) = (e^{(\alpha+i\beta)t}(x+iy), e^t z).$$

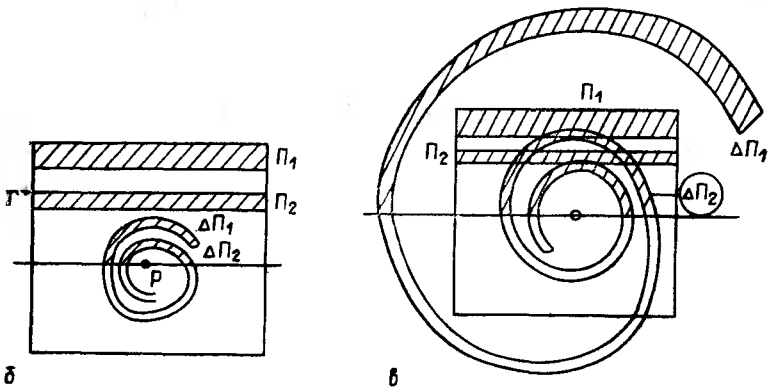
Образ  $\Delta_1(\Gamma^+)$  площадки  $\Gamma^+$  на площадке  $\Gamma'$  — это «толстая» спираль с центром 0; образ  $\Delta(\Gamma^+)$  — аналогичная, диффеоморфно преобразованная «спираль» с центром  $P$  на  $\Gamma^+$  (рис. 48а). Пересечение  $\Gamma^+ \cap \Delta(\Gamma^+)$  распадается на счетное число компонент — «полувитков», занумерованных в порядке их расположения вдоль спирали. Пусть  $\Pi_n$  — криволинейный четырехугольник — прообраз  $n$ -й связной компоненты пересечения  $\bar{\Gamma}^+ \cap \Delta(\Gamma^+)$ , ( $\bar{\Gamma}^+ = U^+ \cap \bar{\Gamma}$ ).

Случай 1.  $\alpha + \lambda \leq 0$ . Рассмотрим отображение  $k$  натурального ряда в себя, заданное формулой (см. рис. 48б):

$$k(n) = \min \{k \mid \Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset\}.$$



а



б

в

Рис. 48. а. Отображение соответствия для седла с комплексным ведущим устойчивым направлением. б, в. Преобразование монодромии гомоклинической траектории седла с парой комплексных собственных значений. Заштрихованы полувитки и их прообразы. б)  $\alpha + \lambda < 0$ , в)  $\alpha + \lambda > 0$

Случай 2.  $\alpha + \lambda > 0$  (рис. 48 в). Положим:

$$n(k) = \max \{n \mid \Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset\}.$$

Замечание. Функции  $k$  (и  $n$ ) определены и при  $\alpha + \lambda > 0$  ( $\alpha + \lambda \leq 0$  соответственно). Но при этом  $k(n) \equiv n$  ( $n(k) \equiv k$ ) — это вытекает из доказательства следующей леммы.

30. Лемма.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = -\alpha$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(k)}{k} = -\frac{1}{\alpha}$  при  $\alpha + \lambda < 0$   
и  $\alpha + \lambda > 0$  соответственно.

◀ Определим  $\arg \Delta(y, z)$ , как непрерывную функцию на  $\Gamma^+$  так, что  $\arg \Delta(y, z)|_{\Pi_1} \in [0, \pi]$ . Тогда

$$|\arg \Delta(y, z)|_{\Pi_n} \in [2\pi(n-1), \pi(2n-1)].$$

Пусть, для определенности, отображение  $f$  сохраняет ориентацию; тогда полярный угол меняется под действием  $f$  на ограниченную величину. По формуле (1)

$$\arg \Delta_1(y, z) = -\beta \ln z + \arg(1 + iy).$$

Тогда

$$\arg \Delta(y, z) = -\beta \ln z + O(1)$$

при  $z \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\max |\ln z|_{\Delta \Pi_n} = \left| \frac{\alpha}{\beta} 2\pi n \right| + O(1).$$

Но

$$|\ln z|_{\Pi_n} = \left| \frac{2\pi k}{\beta} \right| + O(1).$$

Пересечение  $\Pi_k \cap \Delta \Pi_n$  заведомо непусто, если

$$\max |\ln z|_{\Pi_k} \leq \max |\ln z|_{\Delta \Pi_n},$$

и пусто, если

$$\min |\ln z|_{\Pi_k} \geq \max |\ln z|_{\Delta \Pi_n}.$$

Следовательно,

$$k(n) = |\alpha| \cdot n + O(1) \quad \text{при } |\alpha| \geq 1,$$

$$n(k) = \frac{1}{|\alpha|} k + O(1) \quad \text{при } |\alpha| < 1,$$

что и доказывает лемму. ▶

40. Теорема немедленно следует из леммы. Действительно, пусть два поля, удовлетворяющие условиям теоремы, орбитально топологически эквивалентны. Тогда функции  $k$  и  $k$  для этих полей совпадают с точностью до  $O(1)$ . Действительно, пусть  $\Gamma^+$  и  $\Gamma'$  — трансверсальные площадки для первого поля,  $\Gamma_1^+$  и  $\Gamma_1'$  — аналогичные площадки для второго и  $H$  — гомеоморфизм, переводящий фазовые кривые первого поля в фазовые кривые второго. Образы  $H\Gamma^+$  и  $H\Gamma'$  негладки, но пересекают каждую фазовую кривую поля, расположенную в некоторой окрестности этих площадок-образов, в одной точке, поскольку  $H$  — гомеоморфизм. Уменьшая, если надо,  $\Gamma^+$  и  $\Gamma'$  и проектируя площадки  $H\Gamma^+$  и  $H\Gamma'$  на  $\Gamma_1^+$  и  $\Gamma_1'$  вдоль фазовых кривых второго поля, получаем вместо площадок  $\Gamma_1^+$  и  $\Gamma_1'$  принадлежащие им площадки  $\pi H\Gamma^+$  и  $\pi H\Gamma'$  ( $\pi$  — проектирование вдоль фазовых кривых второго поля). Ясно, что замена площадок  $\Gamma^+$  и  $\Gamma'$  на меньшие меняет функции  $k$  и  $n$  на  $O(1)$ . ▶



### 5.7. Добавление: бифуркации гомоклинических петель вне границы множества систем Морса—Смейла.

**Теорема.** Пусть в теореме пункта 5.2 оба условия 1 и 2 нарушены, то есть при  $\sigma < 0$  ( $\sigma > 0$ ) ведущее неустойчивое (соответственно, устойчивое) направление комплексно (и двумерно). Тогда все векторные поля семейства  $\{v_\varepsilon\}$ , достаточно близкие к критическому, имеют гиперболические инвариантные множества; преобразование монодромии поля  $v_\varepsilon$  имеет при  $\varepsilon \neq 0$  конечное число подков Смейла, неограниченно растущее при стремлении  $\varepsilon$  к нулю и равное бесконечности для поля  $v_0$ . Каждое из полей  $v_\varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$  имеет счетное множество гиперболических предельных циклов, устойчивые многообразия которых имеют такую же размерность, как устойчивое многообразие гиперболического седла.

Более точно структура гиперболического подмножества при  $\varepsilon \neq 0$  описывается следующим утверждением.

**Теорема** ([111], [114]). Пусть  $\Omega(\rho)$   $\rho > 1$ , — подмножество схемы Бернулли из бесконечного числа символов, определяемое следующим образом:  $(\dots m_{-1}, m_0, \dots, m_i, \dots) \in \Omega(\rho)$  в том и только том случае, если  $m_{j+1} < \rho m_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Тогда поле  $v_0$  при  $\sigma < 0$  имеет гиперболическое подмножество, траектории которого находятся во взаимно однозначном соответствии, сохраняющем асимптотические свойства <sup>1)</sup>, с множеством  $\Omega(\rho)$ , где  $\rho$  не превышает  $-\operatorname{Re} \lambda_1 / \operatorname{Re} \mu_1$ .

**Замечание.** Предельное значение  $\rho$  совпадает с модулем п. 5.6.

Для трехмерной системы бифуркационные явления при изменении параметра зависят не только от  $\sigma$ , но от новой седловой величины  $\sigma_1 = 2 \operatorname{Re} \lambda_1 + \mu_1$ .

**Теорема** ([40], [147]). Если  $\sigma < 0$ , то: 1) при  $\sigma_1 < 0$  поле  $v_\varepsilon$  при  $\varepsilon$  из счетного множества интервалов будет иметь устойчивый цикл, смена устойчивости которого сопровождается бифуркацией, связанной с рождением цикла удвоенного периода; 2) при  $\sigma_1 > 0$  существует счетное множество интервалов, для значений  $\varepsilon$  из которых поле  $v_\varepsilon$  имеет неустойчивый (устойчивый при  $t \rightarrow -\infty$  цикл). ▲

Поясним механизм возникновения счетного числа периодических траекторий при  $n=3$ . В этом случае отображение последования, соответствующее гомоклинической траектории при нулевом значении параметра, уже изучено в п. 5.4; его образ и прообраз изображены на рис. 48 в. Ограничение отображения последования на криволинейный четырехугольник  $\Pi_k$  при достаточно большом  $k$  представляет собой подкову Смейла; число таких подков счетно. Для любого натурального  $N$  при достаточно близком к нулевому значению параметра отображение по-

<sup>1)</sup> Т. е. периодическим траекториям соответствуют периодические, асимптотическим друг к другу — асимптотические и т. д.

следования имеет не менее чем  $N$  подков Смейла. Каждой подкове соответствует счетное множество периодических траекторий.

В заключение приведем таблицу 3, в которой подытожены утверждения данного параграфа. Здесь символами  $R$  и  $C$  обозначено вещественное и комплексное ведущие направления, а символом « $\Omega$ » обозначена ситуация, когда существует нетривиальное гиперболическое подмножество.

Таблица 3

$\sigma < 0$			$\sigma > 0$		
Неуст.	$R$	$C$	Неуст.	$R$	$C$
Уст.			Уст.		
$R$	$\dim W_L^s =$ $= \dim W_O^s + 1$	$\Omega$	$R$	$\dim W_L^s =$ $= \dim W_O^s$	$\dim W_L^s =$ $= \dim W_O^s$
$C$	$\dim W_L^s =$ $= \dim W_O^s + 1$	$\Omega$	$C$	$\Omega$	$\Omega$

### § 6. Бифуркации, связанные с нетрансверсальными пересечениями

В этом параграфе рассматриваются бифуркации векторного поля, лежащего на границе множества систем Морса—Смейла, для которого неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических положений равновесия и гиперболических циклов, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально по всем траекториям, за исключением одной — простого касания либо квазитрансверсального пересечения.

**6.1. Векторные поля без контуров и гомоклинических траекторий.** Простым следствием теоремы Купки—Смейла является

Утверждение. Если описанное в начале параграфа поле  $v_0$  не имеет контуров и гомоклинических траекторий, то в окрестности  $v_0$  в  $\chi^r(M)$  всюду плотны векторные поля Морса—Смейла. (Всюду ниже  $r \geq 2$ , если  $v_0$  не имеет положений равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения в них и циклов с мультипликаторами  $e^{\pm i\varphi}$ ; в противном случае  $r \geq 3$ ).

Тем не менее, при возмущении  $v_0$  могут происходить бифуркации.

**Определение.** Две траектории  $\Gamma_1, \Gamma_2$  динамической системы называются *внутренне эквивалентными*, если существует

гомеоморфизм фазового пространства<sup>1)</sup> на себя, переводящий траектории в траектории, сохраняющий ориентацию на них и переводящий  $\Gamma_1$  в  $\Gamma_2$ .

Очевидно, разбиение на классы внутренне эквивалентных траекторий является топологическим инвариантом динамической системы. Бифуркации могут происходить без рождения или исчезновения неблуждающих траекторий, а быть связанными с изменением классов внутренней эквивалентности.

**Определение ([30]).** Траектория называется *особой*, если для нее существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для каждого  $\varepsilon$ -близкого к тождественному гомеоморфизма фазового пространства на себя, переводящего траектории в траектории и сохраняющего ориентацию на них, она остается инвариантной.

Очевидно, особая траектория принадлежит классу внутренней эквивалентности, содержащему не более счетного множества траекторий. Положение равновесия, предельный цикл, гетероклиническая траектория, принадлежащая  $W_1^s \cap W_2^u$ ,  $\dim W_1^s + \dim W_2^u - n = 1$ , являются особыми.

**6.2. Теорема о недостижимости.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — циклы векторного поля  $V_0$  такие, что пересечение  $W_{L_1}^s \cap W_{L_2}^u$  содержит траекторию простого касания либо квазитрансверсального пересечения.

**Теорема.** Если  $W_{L_1}^u (W_{L_2}^s)$  содержит особую траекторию, не совпадающую с  $L_1 (L_2)$ , то бифуркационная поверхность  $B_1$  недостижима в точке  $v_0$  хотя бы с одной стороны.

При выполнении условий теоремы,  $W_{L_1}^s (W_{L_2}^u)$  является «гладким» пределом многообразий той же размерности других положений равновесия или циклов как для поля  $v_0$ , так и для близкого векторного поля  $v$ . Поэтому для любого семейства  $\{v_\varepsilon\}$

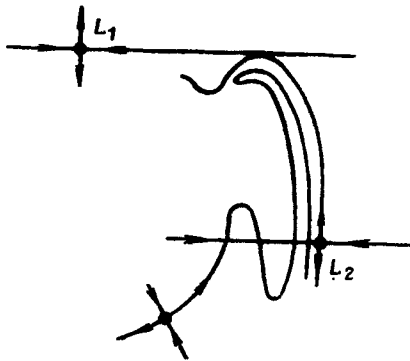


Рис. 49. Неподвижные точки и инвариантные кривые диффеоморфизма плоскости, принадлежащего недостижимой части бифуркационной поверхности

<sup>1)</sup> Оно предполагается здесь компактным.

векторных полей найдутся сколь угодно близкие к нулю значения  $\varepsilon$ , для которых  $W_{L_2}^u(\varepsilon)$  ( $W_{L_1}^s(\varepsilon)$ ) будет иметь траекторию нетрансверсального пересечения (см. рис. 49). Здесь  $W_{L_2}^u(\varepsilon)$  — неустойчивое многообразие гиперболического цикла поля  $v_\varepsilon$ , лежащего в окрестности  $L_2$ ; аналогично определяется  $W_{L_1}^s(\varepsilon)$ .

**6.3. Модули.** В [183] было обнаружено, что топологическая сопряженность диффеоморфизмов с «одинаковым» геометрическим расположением устойчивых и неустойчивых многообразий влечет за собой условия типа равенства на мультипликаторы периодических траекторий. Точнее, пусть  $f$  ( $f'$ ) — диффеоморфизм замкнутого многообразия с гиперболическими неподвижными точками  $p$ ,  $q$  ( $p'$ ,  $q'$ ) типа седло. Пусть  $\lambda_1$  ( $\lambda_1'$ ) — наибольшее по модулю собственное значение  $Df$  ( $Df'$ ) ( $p$ ) ( $Df'$  ( $p'$ )) из всех собственных значений, меньших по модулю единицы, а  $\gamma_2$  ( $\gamma_2'$ ) — наименьшее по модулю собственное значение  $Df$  ( $Df'$ ) ( $q$ ) ( $Df'$  ( $q'$ )) из всех собственных значений, больших по модулю единицы. Предположим, что  $\lambda_1$  ( $\lambda_1'$ ),  $\gamma_2$  ( $\gamma_2'$ ) имеет кратность 1. Тогда [162] существует гладкое инвариантное многообразие  $W_p^{u1}$  ( $W_{p'}^{u1}$ ), касательное в точке  $p$  ( $p'$ ) к сумме  $TW_p^u \oplus R_{\lambda_1}$  ( $TW_{p'}^u \oplus R_{\lambda_1'}$ )<sup>1)</sup>, где  $R_{\lambda_1}$  ( $R_{\lambda_1'}$ ) — собственное подпространство, отвечающее  $\lambda_1$ ,  $\bar{\lambda}_1$ <sup>2)</sup> ( $\lambda_1'$ ,  $\bar{\lambda}_1'$ ); а также — гладкое инвариантное многообразие  $W_q^{s1}$  ( $W_{q'}^{s1}$ ), касательное в точке  $q$  ( $q'$ ) к сумме  $TW_q^s \oplus R_{\gamma_2}$  ( $TW_{q'}^s \oplus R_{\gamma_2'}$ ), где  $R_{\gamma_2}$  ( $R_{\gamma_2'}$ ) — собственное подпространство, отвечающее  $\gamma_2$ ,  $\bar{\gamma}_2$  ( $\gamma_2'$ ,  $\bar{\gamma}_2'$ ).

Определение ([137], [180]). Точка  $r$  простого касания либо квазитрансверсального пересечения  $W_p^u \cap W_q^s$  называется *точкой регулярного пересечения коразмерности 1*, если  $W_p^u$  трансверсально к  $W_q^{s1}$ , а  $W_q^s$  трансверсально к  $W_p^{u1}$  в этой точке.

Хотя многообразия  $W_p^{u1}$  и  $W_q^{s1}$  не единственны, тем не менее, поскольку все многообразия  $W_p^{u1}$  ( $W_q^{s1}$ ) касаются друг друга в точке  $p$  ( $q$ ), то определение точки регулярного пересечения корректно.

Теорема ([137], [180]). Пусть  $f$  ( $f'$ ) —  $C^2$ -диффеоморфизм, имеющий неподвижные гиперболические точки  $p$  ( $p'$ ),  $q$  ( $q'$ ) и траекторию  $\Gamma$ , состоящую из точек регулярного пересечения. Тогда если существует топологическая сопряженность между  $f$  и  $f'$ , определенная в некоторой окрестности  $\bar{\Gamma}$ , то

<sup>1)</sup>  $TW$  — касательное пространство к  $W$ .

<sup>2)</sup> Если  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^1$ , то  $\dim R_{\lambda_1} = 1$ , в противном случае  $\dim R_{\lambda_1} = 2$ .

$$\frac{\log |\lambda_1|}{\log |\gamma_2|} = \frac{\log |\lambda'_1|}{\log |\gamma'_2|}.$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda'_1, \gamma_2$  и  $\gamma'_2$  — те же, что в начале пункта.  
Поясним теорему для  $m=2$  на рис. 50.

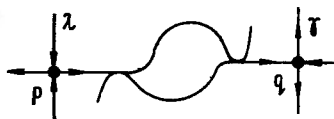


Рис. 50. Диффеоморфизм плоскости, топологическим инвариантом которого является отношение  $\log \gamma / \log \lambda$ .

Несложно сконструировать диффеоморфизм, имеющий больше одного модуля устойчивости. Для этого достаточно, чтобы неустойчивое (устойчивое) многообразие точки  $p(q)$  было предельным для неустойчивых (устойчивых) многообразий других седловых точек (как, например, в теореме пункта 6.2). В [139] выведены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы диффеоморфизм, лежащий на границе множества систем Морса—Смейла, имел единственный модуль.

**6.4. Системы с контурами.** Предположим, что  $v_0$  имеет контур  $\{Q_0, \dots, Q_k\}$ , причем траектория простого касания или квазитрансверсального пересечения принадлежит  $W^s_{Q_{j+1}} \cap W^u_{Q_j}$ .

Существование на границе множества систем Морса—Смейла векторных полей с контурами установлено в [58]. На рис. 51 приведен пример подобного диффеоморфизма.

**Утверждение.** В любой окрестности  $v_0$  в  $\chi^r(M)$  содержатся векторные поля со счетным множеством циклов.

Доказательство заключается в том, что с помощью  $\lambda$ -леммы устанавливается наличие у близкого к  $v_0$  векторного поля гомоклинической кривой, принадлежащей трансверсальному пересечению многообразий см. [178], [182]).

Такое резкое увеличение неблуждающего множества называется  $\Omega$ -взрывом [182].

**З а м е ч а н и е.** Если  $v_0$  — векторное поле с гомоклинической траекторией простого касания устойчивого и неустойчивого многообразий цикла, то утверждение остается справедливым (см. п. 6.6).

**6.5. Диффеоморфизмы с нетривиальными базисными множествами.** Для диффеоморфизмов утверждение пункта 6.4 было усилено в [178], [180]: было показано, что в окрестности точки на бифуркационной поверхности существуют диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А Смейла, с нульмерными нетривиальными базисными множествами. Точнее, пусть

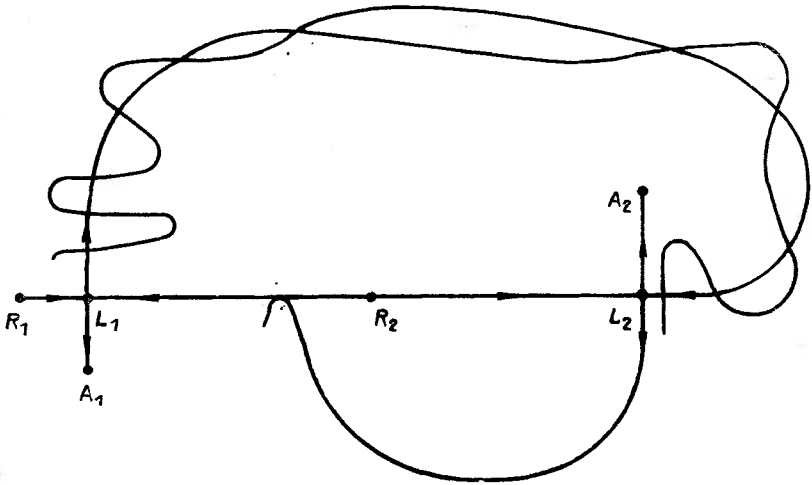


Рис. 51. Критический момент перед  $\Omega$ -взрывом. Неподвижные точки  $A_1, A_2$  — устойчивые,  $R_1, R_2$  — неустойчивые узлы, а  $L_1, L_2$  — седла

$M$  — компактное связное  $C^\infty$ -многообразие,  $\text{Diff}^r(M)$  — пространство  $C^r$ -дiffeоморфизмов  $M$  с равномерной  $C^r$ -топологией,  $I = [0, 1]$ , и для  $k \geq 1, r \geq 1, \Phi^{k,r} = C^k(I, \text{Diff}^r(M))$  — пространство  $C^k$ -отображений  $I$  в  $\text{Diff}^r(M)$  с равномерной  $C^k$ -топологией. Элемент  $\xi \in \Phi^{k,r}$  — это  $C^k$ -кривая  $C^r$ -дiffeоморфизмов. Пусть  $U^{k,r} \subset \Phi^{k,r}$  — множество дуг  $\xi \in \Phi^{k,r}$ , таких, что  $\xi_0 \in MS$ , и если  $1 > b = \inf\{\varepsilon \mid \xi_\varepsilon \in MS\}$ , то  $v_0(\xi_b) \in \mathcal{B}_1$  и удовлетворяет условиям общности положения, где  $MS \subset \text{Diff}^r(M)$  — множество диффеоморфизмов Морса—Смейла (см. § 4). Для  $\delta > 0$  пусть  $U_\delta = [b_\delta, b_0 + \delta)$ .

**Теорема ([178]).** Существует множество второй категории  $\mathcal{B} \subset U^{k,r}, k \geq 1, r \geq 2$ , такое, что если  $\xi \in \mathcal{B}$ , то верно следующее: для любого  $\kappa > 0$  существует  $\delta > 0$  и открытое подмножество  $\mathcal{B}_\delta \subset U_\delta$ , так что: а) мера Лебега  $\mathcal{B}_\delta$  меньше, чем  $\kappa\delta$ ; в) если  $\xi \in U_\delta \setminus \mathcal{B}_\delta$ , то  $\xi_\varepsilon$  — диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А Смейла (см. п. 3.4); с) существуют такие  $\varepsilon$  в  $U_\delta \setminus \mathcal{B}_\delta$ , для которых неблуждающее множество  $\xi_\varepsilon$  бесконечно, нульмерно, а если устойчивые многообразия всех  $Q_i$  имеют одну и ту же размерность, то это верно для любого  $\varepsilon$  из  $\mathcal{B}_\delta$ .

Утверждение теоремы проще всего понять на примере векторных полей в  $\mathbb{R}^3$ , для которых верны аналогичные результаты.

**6.6. Векторные поля в  $\mathbb{R}^3$  с гомоклинической траекторией цикла.** Пусть векторное поле  $v_0 \in C^r, r \geq 3$ , в трехмерном пространстве имеет предельный цикл  $L$  седлового типа и траекторию  $\Gamma \subset W_L^s \cap W_L^u$ , принадлежащую простому касанию его устойчивого и неустойчивого многообразий. Тогда у  $LU\Gamma$  суще-

ствуется окрестность  $U$ , гомеоморфная полноторию  $U_0$  с приклеенной ручкой  $U_1: L$  лежит внутри заполненного тора, а  $\Gamma \cap (U \setminus U_0)$  — связно, т. е.  $\Gamma$  «обходит» ручку только один раз. У системы  $v_0$  в  $\chi^r(\mathbb{R}^3)$  существует окрестность  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_0 \cup \mathfrak{U}_2$ , где в  $\mathfrak{U}_1$  лежат системы, не имеющие гомоклинических траекторий  $\tilde{\Gamma}$ , для которых  $\tilde{\Gamma} \cap (U \setminus U_0)$  связно,  $\mathfrak{U}_2$  состоит из систем, каждая для которых имеет две гомоклинические траектории  $\Gamma_1, \Gamma_2$  такие, что  $\Gamma_i \cap (U \setminus U_0)$  связно,  $\Gamma_i$  принадлежит трансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразий седлового цикла,  $i \in \{1, 2\}$ , а в  $\mathfrak{U}_0$  содержатся системы, «подобные»  $v_0$ , т. е. имеющие гомоклиническую траекторию простого касания.

Пусть  $\lambda, \gamma$  — мультипликаторы цикла  $L: |\lambda| < 1, |\gamma| > 1$ .

Определение. Цикл  $L$  называется *диссипативным*, если  $|\lambda\gamma| < 1$ . Аналогично определяется *диссипативная* неподвижная точка типа седло диффеоморфизма  $M$ .

Если  $\gamma > 0$ , то многообразие  $W_L^u$  гомеоморфно цилиндру и разделяется циклом  $L$  на два множества:  $W_1^u, W_2^u, W_1^u \cap W_2^u = \emptyset$ . Пусть  $\Gamma \subset W_1^u$ .

Теорема ([61], [62]). Если: 1)  $\gamma > 0$ , 2)  $\bar{W}_1^u \cap (W_2^u \setminus L) = \emptyset$ , 3) цикл  $L$  — диссипативен, то существует настолько малая окрестность  $\mathfrak{U}$ ,  $\chi^r(\mathbb{R}^3) \supset \mathfrak{U} \ni v_0$ , что все векторные поля в  $\mathfrak{U}$  являются векторными полями Морса — Смейла в  $\bar{U}$ .

Поясним этот результат на примере. Рассмотрим однопараметрическое семейство  $C^r$ -диффеоморфизмов  $f_\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , которое в окрестности  $U_0$  неподвижной точки  $O$  в начале координат имеет вид  $(x, y) \rightarrow (\lambda x, \gamma y)$ ,  $0 < \lambda < 1 < \gamma, \lambda\gamma < 1$ . Пусть  $P = (0, y^*)$ ,  $Q = (x^*, 0)$ ,  $x^* > 0, y^* > 0, f_0^s P = Q, s \in \mathbb{N}$ , — гомоклиническая точка, по которым устойчивое и неустойчивое многообразия точки  $O$  имеют простое касание (рис. 52). Пусть  $U_0 \supset \Pi_0 = \{(x, y) \mid |x - x^*| \leq \varepsilon_0, |y| \leq \varepsilon_0\}$ ,  $U_0 \supset \Pi_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq \varepsilon_1, |y - y^*| \leq \varepsilon_1\}$ ;  $\Pi_0 \cap f_0(\Pi_0) = \emptyset, \Pi_1 \cap f_0^{-1}(\Pi_1) = \emptyset$ . Предположим, что  $f_0^s$  в  $\Pi_1$  записывается в виде:  $x_0 - x^* = b(y_1 - y^*), y_0 = cx_1 + d(y_1 - y^*)^2 + \varepsilon; (x_0, y_0) \in \Pi_0, (x_1, y_1) \in \Pi_1$ . Это означает, что отрезок неустойчивого многообразия  $x_1 = 0, |y_1 - y^*| \leq \varepsilon_1$  переходит в отрезок параболы  $y_0 = \frac{1}{b^2}(x_0 - x^*)^2 + \varepsilon$ . Таким образом, при  $d < 0, \varepsilon = 0$  выполнено условие 2) теоремы. Видно, что при  $d < 0, \gamma > 0, \varepsilon < 0$  точки из малой зависящей от  $\varepsilon$  окрестности точки  $P$  попадают в область с отрицательными значениями  $y$ , т. е.  $P$  — блуждающая точка (см. рис. 52).

**6.7. Символическая динамика.** Структуру неблуждающего множества векторного поля  $v$ , близкого к  $v_0$ , можно описать следующим образом [61], [62]. Пусть  $\Omega$  — инвариантное подмножество топологической схемы Бернулли из трех символов  $\{0, 1, 2\}$ , выделяемое следующими условиями:

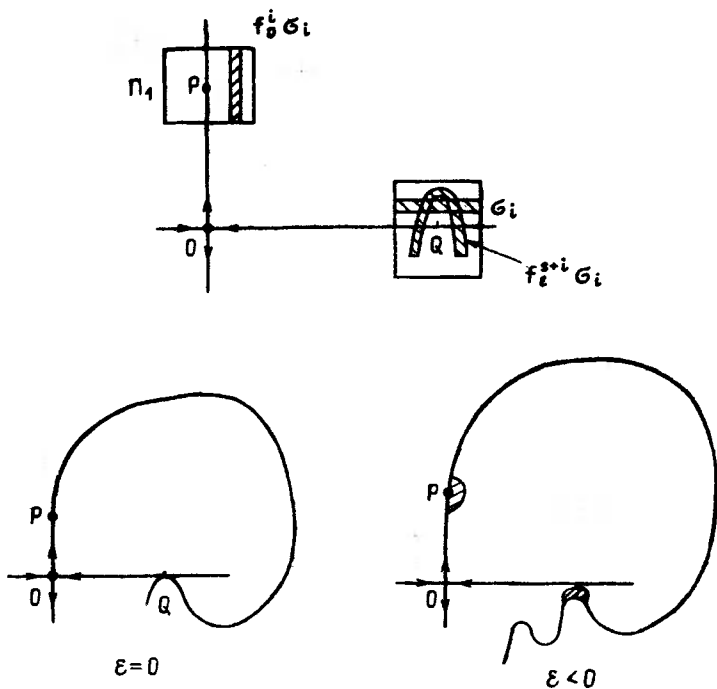


Рис. 52. Подкова Смейла для отображения  $P_e^{s+i}$  (сверху). Окрестность точки  $P$  и ее прообраз при  $\epsilon=0$  и  $\epsilon<0$  (снизу)

1)  $\Omega$  содержит неподвижную точку  $(\dots, 0, 0, \dots)$ .

2) После каждого из символов 1, 2 обязательно следует символ 0.

Отсюда следует, что каждой траектории из  $\Omega$  соответствует последовательность натуральных чисел  $(\dots, p_i, p_{i+1}, \dots)$ , где  $p_i$  — длина отрезка из нулей, содержащегося между двумя отличными от нуля символами. Траекториям,  $\alpha(\omega)$ -асимптотическим к  $(\dots, 0, 0, \dots)$ , ставится в соответствие последовательность  $(p_0, p_1, \dots)$  или  $(p_0, \dots, p_k)$ , где  $p_0 = \infty$ ,  $p_k = \infty$ .

3) Существует  $k \in \mathbb{N}$  такое, что все  $p_i \geq k$ .

4) Существуют константы  $\tilde{\gamma} > 1$ ,  $0 < \tilde{\lambda} < 1$ ,  $d \neq 0$ ,  $v_1 > 0$ ;  $v_2 > 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $e \neq 0$  такие, что для каждой траектории из  $\Omega$  выполнены неравенства

$$\frac{v_1 \tilde{\gamma}^{-p_i} - c v_2 \tilde{\lambda}^{p_{i+1}} - e}{\text{sign } d} > 0.$$

Теорема ([61], [62]). Для любого векторного поля  $\varphi \in \mathcal{U}$  существуют такие константы  $k, v_1, v_2, \tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}, e, d$ , где  $\tilde{\lambda}, \tilde{\gamma}$  — мультипликаторы цикла, близкого к  $L$ ,  $d < 0$ , а  $e > 0$  при  $d \in \mathcal{U}_2$



и  $e < 0$  при  $v \in U_1$ , что справедливо следующее утверждение: если  $\Omega \neq \emptyset$ , то у инвариантного множества траекторий, целиком содержащихся в  $U$ , существует гиперболическое подмножество; его траектории находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями множества  $\Omega$ , при котором циклам соответствуют периодические траектории сдвига  $\sigma|_{\Omega}$  и сохраняются асимптотические свойства траекторий.

Следствие. При  $e > 0$   $v$  имеет бесконечное множество циклов.

Действительно, положив  $p_i = p_{i+1} = p$ , получим, что в силу диссипативности цикла  $L$  и условий  $d < 0$ ,  $e > 0$  неравенство 4) выполнено для всех достаточно больших  $p$ .

Поясним эту теорему. Вернемся к примеру п. 6.6. Так как  $\gamma > 0$ ,  $(\lambda < 1)$ , то существует  $n_1 \in \mathbb{N}$  ( $n_2 \in \mathbb{N}$ ) такое, что  $\gamma^{n_1} \varepsilon_0 > y^* + \varepsilon_1$ ,  $\lambda^{n_1} (x^* + \varepsilon_0) < \varepsilon_1$ ,  $(\lambda^{-n_2} \varepsilon_1 > x^* + \varepsilon_0$ ,  $\gamma^{-n_2} (y^* + \varepsilon_1) < \varepsilon_0$ . Положим для  $i \geq N = \max\{n_1; n_2\}$

$$\sigma_i = \{(x, y) \in \Pi_0 \mid |x - x^*| \leq \varepsilon_0, |\gamma^i y - y^*| \leq \varepsilon_1\}.$$

Очевидно  $f_0^i \sigma_i \subset \Pi_1$ ,  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Отображение  $f_\varepsilon^s f_\varepsilon^i: \sigma_i \rightarrow \Pi_0$  ( $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ ) записывается в виде<sup>1)</sup>  $\bar{x} - x^* = b(y\gamma^i - y^*)$ ,  $\bar{y} = c\lambda^i x^* + d(y\gamma^i - y^*)^2 + \varepsilon$ . Легко убедиться, что на каждом

прямоугольнике  $\sigma_i$  для соответствующего значения  $\varepsilon = \varepsilon_i$  это отображение действует как диффеоморфизм подковы Смейла.

На примере легко понять, почему в окрестности  $v_0$  существуют векторные поля, удовлетворяющие аксиоме А Смейла (теорема пункта 6.5).

Покажем, что существует такое значение параметра, что все области  $\sigma_i$  отображаются, как подковы Смейла. Действительно, поскольку щель, т. е. расстояние (по  $y$ ) между  $\sigma_i$  и  $\sigma_{i+1}$  — величина порядка  $\text{const}/\gamma^{-i}$ , а величина (по  $x$ ) окрестности, в которой содержатся все области  $f_\varepsilon^j \sigma_i$ ,  $j \geq i$  — порядка  $\text{const} \cdot \lambda^i$ , то, в силу диссипативности седла, искомые значения параметра существуют (см: рис. 53). Отсюда вытекает, что все траектории в окрестности гомологической траектории гиперболически, а только они и являются вновь появившимися неблуждающими траекториями.

Замечание. В [61], [62] теорема обобщена на случай систем, не лежащих на границе векторных полей Морса—Смейла, а в [67] также на случай  $n > 3$ .

**6.8. Бифуркации „подков Смейла“.** Начнем с примера пункта 6.6. Здесь при изменении  $\varepsilon$  осуществляются бифуркации, связанные с возникновением подков Смейла. Легко проверить,

<sup>1)</sup> Это отображение похоже на известное отображение Эно [161].

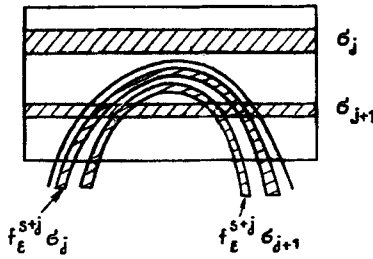


Рис. 53. Образы и прообразы «прямоугольников», лежащих в окрестности гомоклинической траектории диссипативной седловой неподвижной точки, под действием итераций диффеоморфизма

что если  $\epsilon d > d(y^* \gamma^{-i} - c \lambda^i x^*) + \frac{1}{4} (bc \lambda^i - \gamma^{-i})^2$ , то неподвижных точек отображения  $f_\epsilon^{i+s}$  в  $\sigma_i$  нет. При  $\epsilon_i^1 = (y^* \gamma^{-i} - c \lambda^i x^*) + \frac{(bc \lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4d}$  возникает неподвижная точка типа седло-узел, выпадающая на седло и узел, с которыми при дальнейшем изменении параметра вплоть до значения  $\epsilon_i^2 = y^* \gamma^{-i} - c \lambda^i x^* - \frac{3(bc \lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4d}$  бифуркаций не происходит. При  $\epsilon = \epsilon_i^2$  узел (превратившийся в фокус, а затем опять в узел, но уже с отрицательными мультипликаторами) претерпевает бифуркацию удвоения периода (см. рис. 54). Результаты этого примера справедливы и в общем случае. Кроме того, они обобщены на системы с  $n$ -мерным фазовым пространством [66], [67]. Точнее говоря, пусть  $v_0$  —  $C^r$ -гладкое,  $r \geq 4$ , векторное поле на  $m+2$ -мерном,  $m > 1$ , многообразии  $M$ , причем:

- 1)  $v_0$  имеет седловой цикл  $L$  с мультипликаторами  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \gamma$   $|\gamma| > 1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_j|$ ,  $j \in \{2, \dots, m\}$ ,  $\lambda_1$  — не кратный корень характеристического уравнения;
- 2) седловая величина  $|\lambda_1 \gamma| < 1$ ;
- 3)  $W_L^s \cap W_L^u \supset \Gamma$ ;  $\Gamma$  — траектория простого касания, не принад-

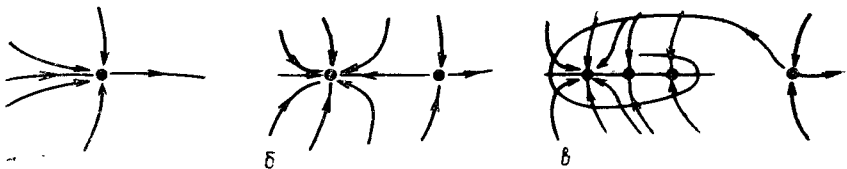


Рис. 54. Бифуркации периодических точек в окрестности гомоклинической траектории

лежащая неведущему подмногообразию устойчивого многообразия  $W_L^s$  1).

Замечание. В [66], [67] на  $v_0$  наложено еще одно условие, не нарушающее общности положения. Для примера пункта 6.6 это условие:  $c \neq 0$ .

Теорема ([66], [67]). Для любого однопараметрического семейства  $\{v_\varepsilon\}$  векторных полей в  $\mathcal{X}^r(M)$ ,  $r \geq 4$ , такого, что  $\{v_\varepsilon\}$  трансверсально к  $B_1$  в точке  $v_0$ , на отрезке  $[-1, 1]$  существует счетное множество интервалов  $\{\delta_k^1 \cup \delta_k^2\}$ ,

$$\overline{\delta_k^1} \cap \overline{\delta_k^2} = \{\varepsilon_k^2\}; \quad \partial\delta_k^1 \cup \partial\delta_k^2 = \{\varepsilon_k^1; \varepsilon_k^2; \varepsilon_k^3\},$$

таких что при  $\varepsilon \in \delta_k^1 \cup \delta_k^2$  векторное поле  $v_\varepsilon$  будет иметь устойчивый предельный цикл — однообходный при  $\varepsilon \in \delta_k^1$  и двухобходный при  $\varepsilon \in \delta_k^2$ . При  $\varepsilon \in \bigcup_{i=1}^3 \varepsilon_k^i$  поле  $v_\varepsilon$  имеет негиперболический предельный цикл: при  $\varepsilon = \varepsilon_k^1$  — однообходный с мультипликатором 1; при  $\varepsilon = \varepsilon_k^2$  ( $\varepsilon = \varepsilon_k^3$ ) — однообходный (двухобходный) с мультипликатором  $(-1)$ .

### 6.9. Векторные поля на бифуркационной поверхности.

В п. 6.7 системам на  $B_1$  отвечает значение  $e=0$ . В условиях же 4) класс допустимых пар натуральных чисел  $p_i, p_{i+1}$  может меняться при незначительном изменении  $\lambda$  и  $\gamma$ , даже при  $e=0$ . Можно предположить, что даже на бифуркационной поверхности  $B_1$  происходят бифуркации. Это действительно так, но лишь для векторных полей, не являющихся граничными для множества векторных полей Морса—Смейла. Справедлива

Теорема ([66], [67]). В окрестности векторного поля, удовлетворяющего условиям теоремы пункта 6.8, но не являющегося граничным для векторных полей Морса—Смейла, на бифуркационной поверхности всюду плотны векторные поля, обладающие: 1) предельным циклом типа седло-узел; 2) предельным циклом типа неориентируемый узел (с мультипликатором, равным  $(-1)$ ); 3) бесконечным множеством устойчивых предельных циклов.

В случае, если бифуркационная поверхность является граничной для векторных полей Морса—Смейла в точке  $v_0$ , то векторные поля  $\{v_\varepsilon\}$  различаются модулем (см. п. 6.3), но геометрически «одинаковы». В неблуждающее множество добавляется лишь гомоклиническая траектория простого касания.

1) Неведущее подмногообразие пересекается с трансверсалью, касаясь инвариантного линейного подпространства, отвечающего мультипликаторам  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ , если  $\lambda_1$  вещественно, и  $\lambda_3, \dots, \lambda_m$  — в противном случае.

2) Пусть  $L$  — гиперболический цикл и  $\Gamma$  — его гомоклиническая траектория. Циклы последовательности  $\{L_n\}$  называются  $k$ -обходными, если для любой окрестности  $U$  цикла  $L$  и любой окрестности  $V$  траектории  $\Gamma$  существуют такое  $N$  и такая окрестность  $W$  цикла  $L$ , что для всех  $n > N$ ,  $L_n \subset \bigcup V$ , и разность  $L_n \setminus W$  состоит из  $k$  связанных компонент.

**6.10. Диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических траекторий.** В окрестности диффеоморфизма двумерной поверхности, имеющего гомоклиническую траекторию простого касания, существуют диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических траекторий. Точнее, имеет место

**Теорема** ([176], [189]). Пусть  $p$  — диссипативная гиперболическая седловая неподвижная точка  $C^r$ -диффеоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$ ,  $r \geq 2$ . Предположим, что  $W_p^u$  и  $W_p^s$  имеют траекторию простого касания. Тогда произвольно  $C^r$ -близко к  $f$  имеется диффеоморфизм  $g$ , для которого существует окрестность  $U \subset \text{Diff}^r(M^2)$  и множество второй категории  $\mathcal{B} \subset U$  такое, что любой диффеоморфизм  $h \in \mathcal{B}$  имеет бесконечно много устойчивых периодических траекторий.

Модификация этой теоремы для однопараметрических семейств диффеоморфизмов приведена в [177].

**Теорема.** Предположим, что  $\{f_\varepsilon\}$  — кривая  $C^3$ -диффеоморфизмов компактной поверхности  $M$  такая, что: 1) при  $\varepsilon = \varepsilon_0$   $f_{\varepsilon_0}$  имеет диссипативную неподвижную седловую точку  $p$  и гомоклиническую траекторию простого касания  $W_p^u$  и  $W_p^s$ ; 2)  $\{f_\varepsilon\}$  трансверсально пересекает  $\mathcal{B}_1$  в точке  $f_0$ . Тогда существуют значения  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , для которых  $f_\varepsilon$  имеет бесконечно много устойчивых периодических траекторий.

**Пример.** Модель контакта Джозефсона

$$\dot{\Phi} = y, \quad \dot{y} = \rho - \sin \Phi - 1/\sqrt{\beta} \cdot (1 + \varepsilon \cos \Phi) y + \alpha \sin \Omega t,$$

где  $\rho$  — безразмерный ток, а  $y$  — безразмерное напряжение, при некоторых (физических) значениях параметров, как доказано в [125], имеет гомоклиническую траекторию простого касания диссипативной седловой неподвижной точки отображения последования плоскости  $t=0$  в  $t = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Приблизительно при этих же значениях параметра было экспериментально обнаружено явление

невоспроизводимости вольт-амперной характеристики: при одних и тех же условиях опыта вольт-амперная характеристика получалась различной: за вольт-амперную характеристику в данном случае можно принять зависимость  $\langle y \rangle$  от  $\rho$ , где  $\langle y \rangle =$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad \text{Если учесть, что } \dot{\Phi} = y, \quad \text{то } \langle y \rangle = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t}, \quad \text{т. е. «числу вращения фазы»}.$$

Естественно предположить, что невоспроизводимость вольт-амперной характеристики объясняется наличием бесконечного предельного множества (и, в частности, счетного множества устойчивых предельных циклов с различными областями существования по параметру  $\rho$ ), содержащего траектории с разными «числами вращения фазы».

## § 7. Бесконечные неблуждающие множества

Здесь описывается компонента границы множества систем Морса—Смейла, состоящая из потоков с бесконечным множеством неблуждающих траекторий. Во всех приводимых ниже примерах типичные точки границы недостижимы. Так ли это в общем случае, неизвестно. В частности, неизвестно, верно ли, что в типичном однопараметрическом семействе векторных полей рождению бесконечного неблуждающего множества предшествует одна из бифуркаций, описанных в предыдущих параграфах (появление негиперболической особой точки или цикла, или траекторий, принадлежащих простому касанию либо нетрансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразий особой точки и (или) цикла).

**7.1. Векторные поля на двумерном торе.** Класс систем Морса—Смейла на двумерном торе  $T^2$  так же, как и на любой двумерной поверхности (см. § 2), совпадает с классом структурно устойчивых (и грубых) систем. Поэтому любая негрубая система  $T^2$  лежит на границе множества систем Морса—Смейла.

Если для некоторой системы на  $T^2$  есть глобальная секущая, — компактная трансверсаль ко всем траекториям системы, — то можно ввести число вращения Пуанкаре, иррациональному значению которого соответствует наличие незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории. По теореме Биркгофа (см., например, [91]) в замыкании незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории содержится континуальное множество незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий, каждая из которых всюду плотна в нем. Таким образом, если система имеет иррациональное число вращения, то ее неблуждающее множество содержит бесконечное множество траекторий.

Для любого однопараметрического семейства  $C^r$ -гладких,  $r \geq 1$ , векторных полей на  $T^2$ , непрерывно зависящих от параметра и обладающих при каждом его значении глобальной секущей, число вращения непрерывно зависит от параметра. Если оно изменяется, то неминуемо принимает иррациональные значения. Следовательно, системы с бесконечным неблуждающим множеством встречаются неустранимым образом в однопараметрических семействах векторных полей, обладающих разными числами вращения хотя бы для двух значений параметра.

Предположим теперь, что для некоторого векторного поля на  $T^2$  число вращения рационально. Если векторное поле — общего положения, на  $T^2$  имеется четное число предельных циклов, половина устойчивых, половина неустойчивых. Число вращения может измениться только после того, как эти циклы перестанут существовать. Их исчезновение связано с прохождением мультипликаторов через  $+1$ . Таким образом, векторное поле с бесконечным неблуждающим множеством (и с глобаль-

ной секущей) является предельным для векторных полей с циклами с мультипликатором  $+1$ . Точно так же множество векторных полей с данным иррациональным числом вращения является предельным для бифуркационных поверхностей, отвечающих циклам с мультипликатором единица. Как вытекает из [18], для почти всех (по мере Лебега) чисел вращения это множество является гладким подмногообразием банахова пространства. В общем случае вопрос открыт.

Для общего двухпараметрического семейства векторных полей, в котором происходит рождение двумерного тора из цикла с мультипликатором  $e^{\pm i\varphi}$ ,  $\varphi \neq 0, \pi, 2\pi/3, \pi/2$ , можно показать, что бифуркационная кривая, отвечающая в этом семействе векторным полям с некоторым фиксированным иррациональным числом вращения, будет гомеоморфным и, как вытекает из [18] для почти всех чисел вращения, диффеоморфным образом отрезка. Может ли теряться гладкость этой кривой для некоторых (иррациональных) чисел вращения, неизвестно.

**7.2. Бифуркации систем с двумя гомоклиническими кривыми седла.** Для простоты опишем потоки в  $\mathbb{R}^3$  (аналогичные результаты верны для потоков в  $\mathbb{R}^n$ , имеющих седла с одномерным неустойчивым многообразием).

Пусть  $v$  — векторное поле, имеющее седло в начале координат  $O$ . Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — корни характеристического уравнения в точке  $O$ , причем  $\lambda_3 > 0$ , а  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . В этом случае размерность неустойчивого (устойчивого) многообразия равна 1 (2). В устойчивом многообразии существует одномерное неведущее подмногообразие  $W_O^{ss}$ , касающееся в точке  $O$  собственного направления, отвечающего собственному значению  $\lambda_2$ .  $W_O^{ss}$  делит  $W_O^s$  на две части. Предположим, что  $W_O^u \subset W_O^s$ , причем  $W_O^u \setminus O$  лежит в одной компоненте  $W_O^s \setminus W_O^{ss}$  (как говорят, имеет место случай «бабочки», а не «восьмерки»). Предположим также, что цикл, который может рождаться из каждой гомоклинической кривой, имеет положительные мультипликаторы (см. § 5). Наконец, предположим, что седловая величина  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_3$  отрицательна (см. рис. 55).

Очевидно, векторное поле  $v$  может лежать на границе множества систем Морса—Смейла (в замкнутом шаре большого радиуса в  $\mathbb{R}^3$ ).

**Теорема.** В сколь угодно малой окрестности векторного поля  $v$  (в пространстве  $C^2$ -гладких векторных полей на  $\mathbb{R}^3$ ) существуют векторные поля, обладающие нетривиальными (т. е. отличными от особых точек и предельных циклов) устойчивыми по Пуассону траекториями.

Зафиксируем окрестность точки  $v$  и обозначим через  $\mathcal{A}_\varepsilon$  множество векторных полей, лежащих в ней и обладающих бесконечным неблуждающим множеством (нетривиальными устойчивыми по Пуассону траекториями).

**Теорема.** Если  $v$  лежит на границе множества систем Морса—Смейла, то для достаточно малой окрестности  $v$  множество  $\mathcal{B}_J$  также принадлежит границе множества систем Мор-

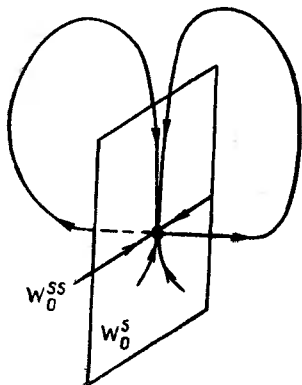


Рис. 55. Векторное поле с двумя гомоклиническими траекториями седла типа «бабочка»

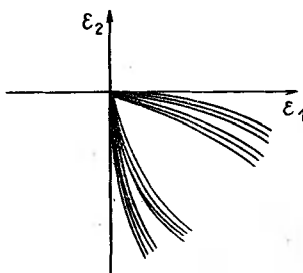


Рис. 56. Бифуркационная диаграмма, двухпараметрического семейства векторных полей, имеющая континуальное множество бифуркационных кривых

са—Смейла и лежит в замыкании множества бифуркационных поверхностей, отвечающих гомоклиническим кривым седла. Для типичного двухпараметрического семейства, проходящего через  $v$ , бифуркационное множество локально гомеоморфно (всюду, кроме конечного множества кривых) прямому произведению канторова множества на отрезок; при этом граничной точке канторова множества отвечают системы с гомоклинической кривой седла, а внутренней точке<sup>1)</sup> — системы с нетривиальными устойчивыми по Пуассону траекториями (см. рис. 56).

Являются ли гладкими бифуркационные поверхности, отвечающие системам с нетривиальными устойчивыми по Пуассону траекториями, или хотя бы соответствующие бифуркационные кривые в общих двухпараметрических семействах — неизвестно.

Заметим, что бифуркационные «поверхности», отвечающие наличию бесконечного множества неблуждающих траекторий, недостижимы во всех точках, кроме  $v$ .

В пункте 7.2 приведены результаты Д. В. Тураева и Л. П. Шильникова (1985 г.).

**7.3. Системы с аттракторами Фейгенбаума.** Известно, что бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода

<sup>1)</sup> Граничные точки канторова множества — это концы смежных интервалов, остальные точки — внутренние.

периодических точек (как говорят, сценарий Фейгенбаума) может приводить к возникновению нетривиальных устойчивых по Пуассону траекторий (см. об этом § 6, гл. 2). При этом для семейств гладких отображений отрезка этот сценарий является структурно устойчивым. Можно доказать, что если семейство гладких отображений «типа параболы» претерпевает бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, приводящую к возникновению множества нетривиальных устойчивых по Пуассону траекторий (или аттрактора Фейгенбаума), то же справедливо для любого  $C^2$ -малого возмущения этого семейства. Кроме того, вплоть до момента возникновения аттрактора Фейгенбаума неблуждающее множество конечно: эндоморфизмы отрезка с аттракторами Фейгенбаума лежат на границе множества «эндоморфизмов Морса—Смейла».

Справедливо ли это хотя бы для диффеоморфизмов диска, — неизвестно. Возможно, что еще до того, как произойдет бесконечное множество бифуркаций удвоения периода, уже возникает бесконечное неблуждающее множество за счет касания многообразий седловых точек.

**7.4. Рождение неблуждающих множеств.** В этом и следующих трех пунктах обсуждается возможность рождения инвариантных многомерных торов «из сгущения траекторий».

**Теорема.** В пространстве гладких векторных полей на области евклидова пространства  $R^n$  (и на любом  $n$ -мерном многообразии) для любого  $m < n - 1$  существует множество  $\mathcal{A}$ , открытое в  $C^1$ -топологии, поля которого имеют инвариантный  $m$ -мерный тор, а граница  $\mathcal{A}$  имеет непустое пересечение с границей множества систем Морса—Смейла. Более того, существует гладкое (чрезвычайно вырожденное) однопараметрическое семейство  $d$  (от degenerated), поля которого при докритических значениях параметра задают системы Морса—Смейла, а при закритических — принадлежат  $\mathcal{A}$ .

**Следствие.** Рассмотрим произвольную деформацию семейства  $d$ , то есть двухпараметрическое семейство  $v$  уравнений с параметрами  $\varepsilon, \mu$ , которое при  $\mu = 0$  совпадает с  $d$ . Тогда малому ненулевому значению параметра  $\mu$  соответствует однопараметрическое семейство  $v_\mu$  (с параметром  $\varepsilon$ ) и значения  $\varepsilon^-(\mu)$  и  $\varepsilon^+(\mu)$  такие, что: при  $\varepsilon < \varepsilon^-(\mu)$  все уравнения семейства  $v_\mu$  задают системы Морса—Смейла; при  $\varepsilon > \varepsilon^+(\mu)$  все уравнения семейства  $v_\mu$  имеют инвариантный тор;  $\varepsilon^\pm(\mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$  (рис. 57).

**З а м е ч а н и е.** Явления, происходящие на интервале  $(\varepsilon^-(\mu), \varepsilon^+(\mu))$ , при  $m > 2$  совершенно не исследованы; при  $m = 2$  значительная информация содержится в работах Шансине (п. 2.3, гл. 2). Однако и в этом случае, насколько нам известно, не получен ответ на следующий вопрос: что происходит в типичном семействе при первой бифуркации, выводящей из множества систем Морса—Смейла?



По-видимому, гладкий притягивающий тор, имеющийся в семействе  $v_\mu$  при  $\varepsilon > \varepsilon^*(\mu)$ , при уменьшении  $\mu$  теряет гладкость и, прежде чем исчезнуть, превращается в странный аттрактор.

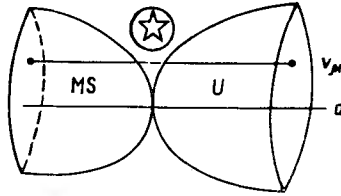


Рис. 57. Левая выделенная часть семейства  $v_\mu$  состоит из полей Морса—Смейла, правая — из полей, имеющих инвариантный тор. Звездочка означает неисследованный интервал, на котором происходит бифуркация

**7.5. Сохранение и гладкость инвариантных многообразий (по Феничелю) [144].** Формулируемая ниже теорема утверждает, что притягивающее инвариантное многообразие сохраняется при малом возмущении, если скорость приближения траекторий к многообразию извне больше, чем скорость сближения траекторий на самом многообразии. Числа, характеризующие эти скорости, называются «показателями типа ляпуновских» и определяются следующим образом.

**Определение 1.** Многообразию с краем называется отрицательно инвариантным для векторного поля, если поле во внутренних точках многообразия касается его, а на краю тоже касается и направлено наружу.

**Определение 2.** Многообразию с краем называется притягивающим, если существует окрестность многообразия  $M$ , неотрицательная функция  $\rho$  в этой окрестности и положительное  $t$  такие, что

$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x \in g_v^t M; \quad L_{v\rho} < 0 \text{ вне } g_v^t M.$$

Пусть  $TM$  — касательное и  $N$  — нормальное к  $M$  расслоение,  $T$  — ограничение на  $M$  касательного расслоения к фазовому пространству;  $p: T \rightarrow N$  — оператор проектирования вдоль  $TM$ .

**Определение 3.** Показателем притяжения отрицательно инвариантного многообразия  $M$  для поля  $v$  называется число

$$\lambda_N = \sup_{\substack{x \in M \\ \xi \in T}} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln \|p g_*^t (g^{-t} x) \xi\|}{|t|}.$$

**Определение 4.** Показателем сближения траекторий на  $M$  называется число

$$\lambda_T = \sup_{x \in M} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|g_*^{-t}(x)\xi\|}{|t|},$$

$$\xi \in T_x M \setminus \{0\}$$

Обозначения подчеркивают, что первый показатель характеризует сжатие в направлении, нормальном к  $M$ , а второй — в касательном.

**Пример.** Рассмотрим гиперболическую особую точку векторного поля в  $\mathbb{R}^n$  с устойчивым многообразием  $W^s$  и неустойчивым  $W^u$ . Пересечение  $M$  неустойчивого многообразия с некоторой окрестностью особой точки поля является отрицательно инвариантным многообразием. Пусть  $\lambda_i$  — собственные значения особой точки с отрицательной, а  $\mu_j$  — с положительной вещественной частью. Тогда показатели притяжения к  $M$  и сближения на  $M$  имеют вид

$$\lambda_N = -\max_j \operatorname{Re} \lambda_j, \quad \lambda_T = -\min_j \operatorname{Re} \mu_j.$$

**Теорема.** Пусть  $v$  — гладкое векторное поле,  $M$  — его отрицательно инвариантное многообразие с краем,  $\lambda_N$  и  $\lambda_T$  — соответствующие показатели, и натуральное  $r$  удовлетворяет условию

$$r\lambda_T < \lambda_N.$$

Тогда любое  $C^r$ -близкое к  $v$  поле имеет  $C^r$ -гладкое отрицательно инвариантное многообразие, близкое к  $M$ .

**Замечание.** Механизм потери гладкости — такой же, как в п. 5.2, гл. 2.

**7.6. Вырожденное семейство и его окрестность в функциональном пространстве.** Здесь доказана теорема пункта 7.4.

Построим сначала вспомогательное семейство векторных полей в прямом произведении  $I \times D$  отрезка  $|t| \leq 2$  на  $(n-1)$ -мерный шар  $\|x\| \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Рассмотрим гладкое векторное поле  $v$  в  $D$ , равное нулю в некоторой окрестности границы  $D$ , имеющее гладкий инвариантный  $(n-2)$ -мерный тор с положительным показателем притяжения; поле  $v$  на торе диффеоморфно постоянному полю, задающему условно периодическую обмотку. Отсюда следует, что показатель сближения траекторий поля на торе равен нулю и все траектории на торе — неблуждающие.

Через  $V$  обозначим поле на произведении  $I \times D$ , касательное к «вертикальным» слоям:  $V = (v, 0)$ . Пусть  $\Phi_-$  и  $\Phi_+$  — две гладкие функции на  $I$ ;  $\Phi_-$  (соответственно  $\Phi_+$ ) равняется 1 в некоторой окрестности точки  $-1$  (соответственно  $+1$ ); носители функций  $\Phi_-$  и  $\Phi_+$  — непересекающиеся отрезки, лежащие строго внутри  $I$ ;  $\Phi_+(-x) = \Phi_-(x)$ . Пусть  $\psi_\varepsilon$  — гладкое семейство функций на  $I$  с базой  $|\varepsilon| \leq \frac{1}{5}$ ;  $\psi_\varepsilon(t) = (t \pm 1)^2 - \varepsilon$  при  $|t \pm 1| \leq \frac{1}{2}$ ; функ-

ции  $\psi_\varepsilon$  четны и положительны всюду вне отрезков  $|t \pm 1| < \frac{1}{2}$  и равны 1 в некоторой окрестности концов отрезка  $I$ .

Рассмотрим семейство полей  $V_\varepsilon$  в  $I \times D$ :  $V_\varepsilon = \psi_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \Phi_+ V - \Phi_- V$ . Поля семейства обладают следующими свойствами: а) Задают обратимую систему (поле  $V_\varepsilon$  меняет знак при симметрии  $(t, x) \mapsto (-t, x)$ ). б) В окрестности границы области  $D \times I$  поле  $V_\varepsilon$  совпадает с  $\frac{\partial}{\partial t}$ . в) При  $\varepsilon < 0$  определено преобразование монодромии поля  $V_\varepsilon$ :  $\{-2\} \times D \rightarrow \{2\} \times D$ , сохраняющее  $x$  в силу симметрии поля  $V_\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  поле имеет полуустойчивый тор (и даже два таких тора) с условно периодической обмоткой. При  $\varepsilon > 0$  поле  $V_\varepsilon$  имеет два отталкивающих тора и два притягивающих показателем притяжения  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Построим теперь описанное в теореме вырожденное семейство  $d$  на многообразии  $M$ . Для этого возьмем произвольное векторное поле  $\omega$  на  $M$ , задающее систему Морса—Смейла, и рассмотрим ее трубку траекторий  $B$ , диффеоморфную произведению диска на отрезок, все фазовые кривые которой пробегают за время 4. Изменим поле  $\omega$  в этой трубке следующим образом. Пусть  $H$  — диффеоморфизм  $B \rightarrow I \times D$ , выпрямляющий поле  $\omega$  (переводящий его в  $\frac{\partial}{\partial t}$ ), пусть  $G = H^{-1}$ . Положим

$$v_\varepsilon = \begin{cases} \omega & \text{вне } B, \\ G_* V_\varepsilon & \text{внутри } B. \end{cases}$$

Очевидно, поле  $v_\varepsilon$  гладко и гладко зависит от  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon < 0$  поле  $v_\varepsilon$  задает систему Морса—Смейла, поскольку поле  $\omega$  этим свойством обладает, и преобразования монодромии дна трубки  $B$  на ее крышку у полей  $v_\varepsilon$  и  $\omega$  совпадают. При  $\varepsilon \geq 0$  поле  $v_\varepsilon$  имеет бесконечное множество неблуждающих траекторий, заполняющих четыре тора. Семейство  $d$  построено.

Исследуем теперь окрестность семейства  $d$  в функциональном пространстве. В силу структурной устойчивости систем Морса—Смейла каждое из полей  $v_\varepsilon$  при  $\varepsilon < 0$  имеет окрестность, состоящую из систем Морса—Смейла. При  $\varepsilon > 0$  каждое из полей  $v_\varepsilon$  имеет окрестность, состоящую из полей с инвариантным  $(n-2)$ -мерным тором. Это следует из теоремы Феничеля, поскольку показатель притяжения к инвариантному тору  $v_\varepsilon$  при  $\varepsilon > 0$  положителен, а показатель сближения траекторий на торе равен нулю. Теорема доказана.

**7.7. Рождение торов в трехмерном фазовом пространстве.** Рассмотрим двухпараметрическое семейство векторных полей на трехмерном многообразии, в котором происходит потеря устойчивости предельным циклом при прохождении пары мультипликаторов через мнимую ось в случае дополнительного вырождения в нелинейных членах, описанного в п. 2.3, гл. 2. Если се-

мейство типично, то в его типичном однопараметрическом подсемействе (выделенном жирной линией на рис. 22) происходят следующие явления. Для всех значений параметра, меньших некоторого  $\epsilon_-$ , цикл сохраняет устойчивость, для всех значений, больших некоторого  $\epsilon_+$ , уравнение семейства имеет два инвариантных тора. Перестройки, соответствующие интервалу  $(\epsilon_-, \epsilon_+)$ , по-видимому, весьма сложны (см. конец п. 2.3, гл. 2), первая бифуркация и здесь не описана.

## § 8. Аттракторы и их бифуркации

Согласно широко распространенной гипотезе, предельное поведение траекторий типичной динамической системы на компактном многообразии описывается следующим образом. За конечное время каждая положительная полутраектория попадает в окрестность притягивающего множества — аттрактора. Если аттрактор достаточно массивен — отличен от конечного объединения особых точек и предельных циклов, — то поведение фазовых кривых на аттракторе и вблизи него хаотично. Аналогичная гипотеза имеется для диссипативных систем, фазовое пространство которых — компактное многообразие с краем, а поле системы направлено внутрь на краю.

Эти гипотезы не доказаны. Более того, общепринятого определения аттрактора не существует. Проблема предельного поведения траекторий исследуется с двух сторон. С одной стороны, определения аттрактора даются так, чтобы каждая диссипативная система (для простоты ниже речь идет именно о таких системах) имела аттрактор. При этом аттрактор не должен содержать «лишних точек» и должен совпадать с тем «пространством установившихся режимов», которое наблюдается в численном или натурном эксперименте. Например, максимальный аттрактор диссипативной системы — пересечение всех сдвигов поглощающей области преобразованиями фазового потока за положительное время — может быть гораздо шире «пространства установившихся режимов». На рис. 58а показана динамическая система с поглощающим кольцом, максимальный аттрактор которой — окружность, содержащая два положения равновесия — седло и узел. Фазовые кривые стремятся к седлу из множества начальных условий меры нуль; почти все (в смысле меры Лебега) фазовые кривые стремятся к узлу, который и следует считать «физическим аттрактором».

С другой стороны, определения аттрактора даются так, чтобы обеспечить хаотичность поведения траекторий на нем (и, может быть, возле него). Так возникают гиперболический, стохастический и другие аттракторы [100], [101], [198]. Неизвестно, однако, типичны ли системы с хаотическим поведением траекторий на аттракторе в классе систем, аттракторы которых не состоят из конечного числа точек и циклов.

В этом параграфе обсуждаются разные определения аттракторов, а затем описываются бифуркации аттракторов.

**8.1. Вероятностно предельные множества по Милнору [174].** Пусть диссипативная система задана на компактном гладком

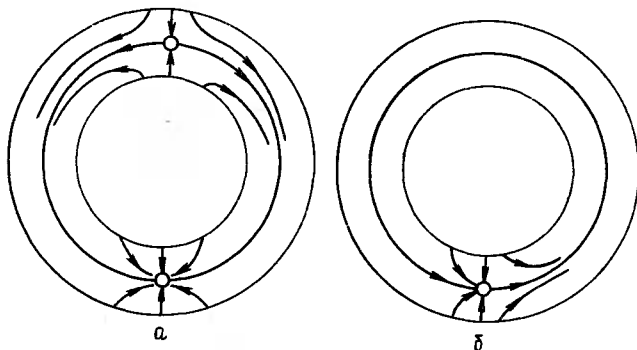


Рис. 58. Поглощающее кольцо; максимальный аттрактор в нем — окружность, вероятностно предельное множество — узел в случае «а» и седло-узел в случае «б»

многообразии с краем. Рассмотрим произвольную гладкую меру на многообразии, то есть меру, имеющую гладкую плотность относительно меры Лебега в каждой координатной окрестности. Класс измеримых множеств и множеств меры нуль не зависит от выбора плотности; этот выбор для дальнейшего не важен.

**О п р е д е л е н и е.** *Вероятностно предельное множество* динамической системы — это наименьшее замкнутое множество, содержащее  $\omega$ -предельные множества для почти всех точек фазового пространства.

Это определение имеет смысл не только для потоков и диффеоморфизмов, но и для произвольных гладких отображений.

Вероятностно предельное множество не является устойчивым, как показывает рис. 58б. Здесь вероятностно предельным множеством является положение равновесия типа седло-узел.

**8.2. Статистически предельные множества.** В вычислительных экспериментах предельные множества часто фотографируются. Для этого вычисляется одна или несколько траекторий, и значения каких-нибудь двух функций (например, двух координат) в точках этих траекторий, выводятся на экран осциллографа. На экране вспыхивают и гаснут точки (точнее, маленькие пятна). Объектив аппарата открывается через большое время после начала счета и в течение долгого времени остается открытым. Те точки, которые в течение этого времени вспыхивали много раз, получаются на фотографии; редко вспыхивавшие точки — не получаются.

Рассмотрим, например, динамическую систему на сфере с поглощающей областью, имеющей максимальный аттрактор в виде пары петель гиперболического седла (восьмерка, см. рис. 59а). На фотографии, сделанной по описанному методу, получится положение равновесия и четыре интервала сепаратрис (рис. 59б). Чем больше время съемки, тем меньше эти интервалы, поскольку относительное время, проводимое траекториями вблизи седла, растет. Вероятностно предельное множество в этом примере — вся восьмерка.

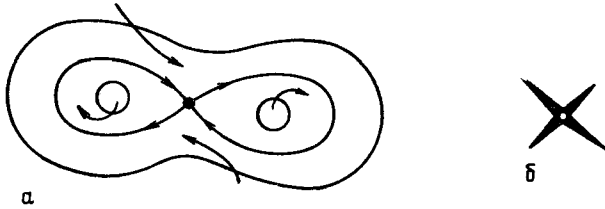


Рис. 59. Векторное поле с максимальным аттрактором и вероятностно предельным множеством типа восьмерки; статистически предельное множество — седло

Скажем, что положительная полутраектория точки  $x$  под действием фазового потока  $\{g^t\}$  проводит в среднем положительное время в области  $U$ , если относительная мера тех значений  $t$  из отрезка  $[0, T]$ , для которых  $g^t x \in U$ , имеет неотрицательный верхний предел при  $T \rightarrow \infty$ :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_U \circ g^t x dt > 0.$$

Здесь  $\chi_U$  — характеристическая функция множества  $U$ .

Определение (Ю. С. Ильяшенко, 1985). Пусть динамическая система на компактном гладком многообразии с краем диссипативна и  $m$  — гладкая мера на этом многообразии с положительной плотностью. Открытое множество  $u$  называется *существенным*, если положительна мера множества тех точек, положительные полутраектории которых проводят в среднем положительное время в области  $U$ . *Статистически предельным множеством* называется дополнение к максимальному несущественному открытому подмножеству фазового пространства.

Статистически предельное множество в предыдущем примере — седло.

**З а м е ч а н и е.** Открытое множество имеет непустое пересечение со статистическим предельным множеством, если и только если это открытое множество существенно.

**Л е м м а.** Статистически предельное множество всегда принадлежит вероятностно предельному множеству.

◀ Предположим противное. Пусть некоторая точка статистически предельного множества не принадлежит вероятностно предельному. Возьмем окрестность  $U$  этой точки, замыкание которой не пересекается с вероятностно предельным множеством. Эта окрестность существенна; следовательно, существует множество положительной меры, положительная полутраектория любой точки которого проводит в  $U$  в среднем положительное время;  $\omega$ -предельное множество каждой такой точки имеет непустое пересечение с областью  $U$ , что противоречит выбору этой области. ▶

**8.3. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов.** В оставшейся части параграфа обсуждаются бифуркации аттракторов. При этом под аттрактором понимается максимальный аттрактор в поглощающей области. Напомним определения. Обозначим через  $\{f^t\}$  поток, порожденный векторным полем  $v$ .

**О п р е д е л е н и е.** Область  $B$  называется *поглощающей*, если  $f^t \bar{B} \subset B, t > 0$ . *Максимальным аттрактором* в поглощающей области  $B$  называется множество  $A = \bigcap_{t \rightarrow \infty} f^t B$ . Множество называется

*аттрактором*, если существует поглощающая область, максимальным аттрактором которой оно является. *Областью притяжения* аттрактора  $A$  называется множество  $U(A)$ , состоящее из всех точек, через которые проходят траектории, стремящиеся к  $A$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Простейшими аттракторами будут очевидно: устойчивое положение равновесия, устойчивый предельный цикл, притягивающий двумерный тор.

**О п р е д е л е н и е.** Аттрактор называется *странным*, если он отличен от конечного объединения гладких подмногообразий фазового пространства.

Для простоты, дальнейшее изложение будем вести на языке однопараметрических семейств динамических систем. Итак, пусть  $\{f_\varepsilon^t\}$  — поток, зависящий от скалярного параметра. Предположим, что: 1) при  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon^*$  существует аттрактор  $A_\varepsilon$ , для которого существует поглощающая область  $B_\varepsilon$ , такая что для любого  $\varepsilon' < \varepsilon^*$ ,  $\text{int} \left( \bigcap_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon'} B_\varepsilon \right) = B_{\varepsilon'}$ ; 2)  $\varepsilon^*$  — бифуркационное значение параметра,

причем  $A_{\varepsilon^*}$  имеет непустое пересечение с носителем бифуркации (см. § 2) потока  $\{f_{\varepsilon^*}^t\}$ , где  $A_{\varepsilon^*} = \bigcap_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} A_\varepsilon$ .

Здесь  $\text{I}t C_\varepsilon$  и  $\overline{\text{I}t C_\varepsilon}$  — топологический предел и, соответственно, верхний топологический предел семейства  $\{C_\varepsilon\}$ <sup>1)</sup>.

Определение. Значение  $\varepsilon = \varepsilon^*$  называется *внутренним бифуркационным значением*, если  $A_{\varepsilon^*}$  — аттрактор. В противном случае оно называется *кризисным бифуркационным значением*. Соответствующие бифуркации называются *внутренней бифуркацией* и *кризисом семейства аттракторов*.

Заметим, что область притяжения аттрактора может как менять, так и не менять свой топологический тип при его внутренней бифуркации. Например, для потока на диске при рождении устойчивого предельного цикла из фокуса она из односвязной становится двухсвязной, а при возникновении точки типа седло-узел на устойчивом предельном цикле она двухсвязна и до, и после бифуркации.

В результате кризиса система переходит на другой режим — изображающая точка может уходить в «новую» область фазового пространства.

**8.4. Внутренние бифуркации и кризисы положений равновесия и циклов.** В соответствии с приведенными в п. 8.3 определениями, разобьем бифуркации циклов на внутренние и кризисы. Будем говорить, что имеет место мягкий (жесткий) случай, если в момент бифуркации положение равновесия или цикл устойчивы (неустойчивы).

Положения равновесия.

1. Бифуркация Андронова—Хопфа: в мягком случае — внутренняя бифуркация, в жестком — кризис.

2. Образование седло-узла и его исчезновение — кризис.

Предельные циклы.

1. Слияние устойчивого цикла с седловым и обоюдное исчезновение — кризис.

2. Бифуркация удвоения периода и бифуркация рождения тора из цикла: в мягком случае — внутренняя бифуркация, в жестком — кризис.

3. «Влипание» предельного цикла в гомоклиническую траекторию седла — кризис.

4. «Влипание» предельного цикла в гомоклиническую траекторию седло-узла — внутренняя бифуркация.

5. Катастрофа голубого неба. Можно показать, что в примере п. 7.2 верхним топологическим пределом цикла  $L(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$  будет вся бутылка Клейна ( $\varepsilon^*$  — бифуркационное значение).

<sup>1)</sup> Напомним, что множество называется топологическим пределом, если оно одновременно является и верхним и нижним топологическим пределом. Множество называется верхним (нижним) топологическим пределом семейства  $\{C_\varepsilon\}$ , если это множество всех точек, для любой окрестности каждой из которых существует сколь угодно близкое к  $\varepsilon^*$  значение  $\varepsilon$  такое, что пересечение  $C_\varepsilon$  с этой окрестностью непусто (начиная с некоторого  $\varepsilon_0 < \varepsilon^*$ , пересечение  $C_\varepsilon$  с этой окрестностью непусто при  $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ ).



ние, отвечающее моменту исчезновения цикла), и, вообще, для любого однопараметрического семейства систем без положений равновесия на  $K^2$ , в котором осуществляется указанная бифуркация, она будет внутренней. Так ли это в общем случае или хотя бы для систем на двумерной поверхности, отличной от бутылки Клейна, неизвестно.

**З а м е ч а н и е.** Для градиентных систем кризисы можно трактовать как катастрофы.

**8.5. Бифуркации двумерного тора.** Предположим, что поток  $\{f_\epsilon^t\}$ , скажем, при  $0 \leq \epsilon < \epsilon^*$ , является системой Морса—Смейла и имеет притягивающий инвариантный двумерный тор  $T_\epsilon$ . Предположим, что при  $0 \leq \epsilon < \epsilon^*$  на торе существует глобальная секущая. В этом случае число вращения рационально, на  $T_\epsilon$  имеется четное число предельных циклов, половина из которых устойчивы, половина — неустойчивы (седловые по отношению ко всему фазовому пространству), и  $T_\epsilon$  образован замыканием неустойчивых многообразий этих седловых циклов. Предположим также, что  $\epsilon^*$ -бифуркационное значение параметра, и при  $\epsilon = \epsilon^*$  осуществляется бифуркация коразмерности 1 — одна из рассмотренных выше. Следовательно, это либо бифуркация одного из предельных циклов, лежащих при  $\epsilon < \epsilon^*$  на  $T_\epsilon$ , либо бифуркация, связанная с образованием гомо- и гетероклинической траектории на неустойчивом многообразии одного из седловых циклов.

**Внутренние бифуркации двумерного тора** (см. [34], [123] и п. 1.6, гл. 2).

1. Смена устойчивости устойчивого предельного цикла на торе — удвоение периода, либо рождение тора. В этом случае существует значение  $\epsilon_1 < \epsilon^*$ , при котором мультипликаторы цикла становятся комплексными. При  $\epsilon > \epsilon_1$   $T_\epsilon$  не является гладким, неустойчивое многообразие седлового цикла накручивается на устойчивый цикл, а не гладко примыкает к нему.

2. Слияние устойчивого и седлового циклов, лежащих на торе, и образование цикла с мультипликатором 1, который может быть как  $s$ -критическим, так и некритическим. В первом случае, если все траектории на неустойчивом множестве — гомоклинические, то при  $\epsilon > \epsilon^*$  может возникнуть странный аттрактор (см. § 4). Если при  $0 < \epsilon < \epsilon^*$  на  $T_\epsilon$  лежит больше двух циклов, то при  $\epsilon > \epsilon^*$ , по-прежнему, существует тор, на котором на два цикла меньше.

3. Касание неустойчивого многообразия седлового цикла с устойчивым многообразием того же самого или другого седлового цикла. В первом случае возникает гомоклиническая траектория, и при  $\epsilon > \epsilon^*$  — нетривиальное гиперболическое множество, во втором — гетероклиническая траектория, и при  $\epsilon > \epsilon^*$  аттрактор уже не является тором.

**П р и м е р.** Отображение

$$(x, \theta) \rightarrow (e^{-r}(x \mp a \sin \theta), (\theta + r + x \mp a \sin \theta) \bmod 2\pi)$$

кольца  $0 < x \leq x_0$ , где  $r \gg 1$ ,  $a \geq 0$ ,  $x_0 > \frac{a}{1-e^{-r}}$ , моделирует ото-

бражение последования в окрестности «разрушающегося» тора. Легко проверить, что для любого  $k \in \mathbb{Z}$  на плоскости параметров  $(r, a)$  кривая  $B^+ : a = \pm (2\pi k - r) \cdot (1 - e^{-r})$  является бифуркационной кривой, отвечающей наличию циклов (неподвижных точек) с мультипликатором  $+1$ , а кривая  $B^- : a^2 = (2\pi k - r)^2 (1 - e^{-r})^2 + 4(1 + e^{-r})^2$  — с мультипликатором  $(-1)$ . Можно показать также, что существуют две бифуркационные кривые  $B_{1,2}$ , отвечающие касанию неустойчивого многообразия седловой неподвижной точки и ее устойчивого многообразия «с разных сторон». Бифуркационная картина приведена на рис. 60

### К р и з и с ы.

1. Потеря устойчивости предельным циклом на торе, происходящая жестким образом: при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$  к устойчивому циклу, лежащему на торе, «подтягивается» седловой цикл удвоенного периода, либо неустойчивый тор, лежащий на границе области притяжения  $T_\varepsilon$  при  $\varepsilon < \varepsilon^*$  и при  $\varepsilon = \varepsilon^*$  передает свою неустойчивость этому предельному циклу.

2. Бифуркация устойчивого цикла на торе, при которой седловой цикл, лежащий в границе области притяжения тора, подтягивается к устойчивому циклу, сливается с ним и исчезает. Мультипликатор в этот момент становится равным  $(+1)$ .

3. Бифуркация седлового цикла на торе, при которой устойчивые при докритических значениях параметра циклы на торе не теряют свою устойчивость. При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$  к седловому циклу подтягивается либо другой цикл, либо тор и сливается с ним при  $\varepsilon = \varepsilon^*$ . (Мультипликатор в этот момент может стать равным и  $(+1)$ , и  $(-1)$ , и  $e^{i\varphi}$ .)

4. Касание неустойчивого многообразия цикла на торе и устойчивого многообразия коразмерности 1 положения равновесия или цикла, лежащего в границе области притяжения  $T_\varepsilon$  при  $\varepsilon < \varepsilon^*$ .

Все четыре случая могут, очевидно, неустранимым образом реализовываться в однопараметрических семействах динамических систем. Приведем пример на случай 3.

Пр и м е р 1. Следующее отображение можно трактовать как отображение последования в окрестности тора (тору при этом отвечает инвариантная кривая)

$$(x, \theta) \rightarrow (bx + x^2 \mp c \cos \theta, (\theta \mp a \sin \theta) \bmod 2\pi),$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ . Нетрудно проверить, что при  $c < \frac{(b-1)^2}{4}$  отображение имеет инвариантную замкнутую кривую, на которой лежат неподвижные точки

$$M_1 = \left( \frac{1-b-\sqrt{(1-b)^2-4c}}{2}, 0 \right), \quad M_2 = \left( \frac{1-b-\sqrt{(1-b)^2+4c}}{2}, \pi \right),$$

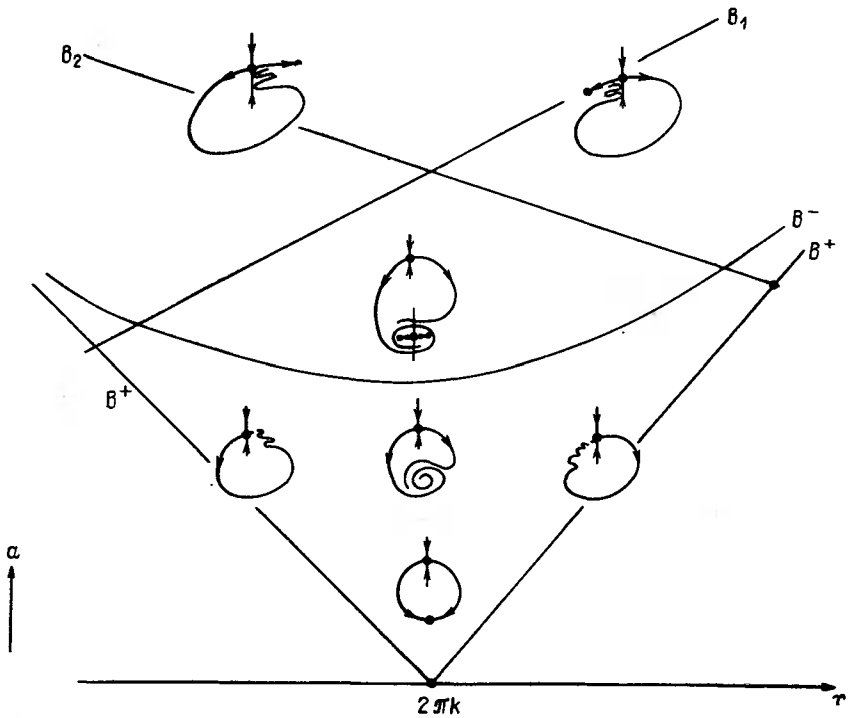


Рис. 60. Бифуркационная диаграмма двухпараметрического семейства диффеоморфизмов кольца. Разным ее частям соответствуют различные механизмы потери гладкости и разрушения замкнутой инвариантной кривой, также показанные на рисунке

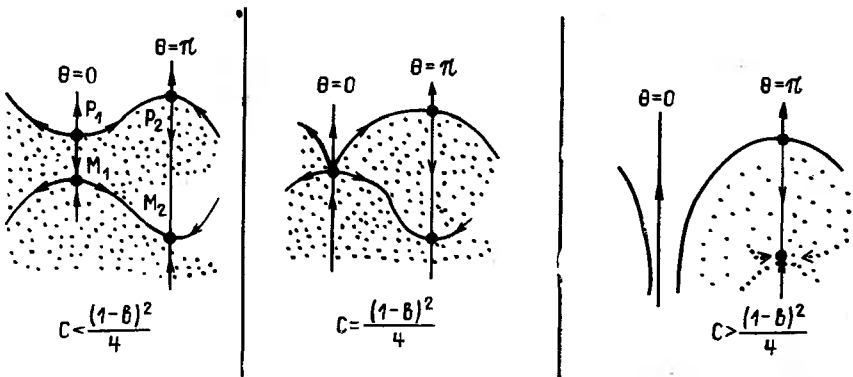


Рис. 61. Кризис замкнутой инвариантной кривой (нижняя кривая на левом и среднем рисунках); случай 3. Точками отмечена область притяжения аттрактора

причем  $M_1$ —седло, а  $M_2$ —устойчивый узел. В границу области притяжения этой кривой входят неподвижные точки

$$P_1 = \left( \frac{1-b + \sqrt{(1-b)^2 - 4c}}{2}, 0 \right), \quad P_2 = \left( \frac{1-b + \sqrt{(1-b)^2 + 4c}}{2}, \pi \right),$$

причем  $P_1$ —неустойчивый узел, а  $P_2$ —седло. При  $c = \frac{(1-b)^2}{4}$

точки  $P_1$  и  $M_1$  сливаются и при  $c > \frac{(1-b)^2}{4}$  исчезают.

Исчезает и замкнутая инвариантная кривая (см. рис. 61).

Можно показать, что  $C^2$ -возмущение данного семейства отображений (в котором параметры  $a$  и  $b$  фиксированы, а  $c$ —меняется) претерпевает подобную бифуркацию, т. е. семейство структурно устойчиво в окрестности точки  $c = \frac{(1-b)^2}{4}$  в пространстве параметров и в некотором кольце в фазовом пространстве.

Пример 2. Аналогичный пример на случай 2 задает отображение

$$(x, \theta) \rightarrow (bx + x^2 + c \sin \theta, (\theta + a \cos \theta) \pmod{2\pi}),$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Легко показать, что при  $c < \frac{(b-1)^2}{4}$  существует инвариантная кривая (являющаяся замыканием неустойчивого многообразия неподвижной точки  $\left( \frac{1-b - \sqrt{(1-b)^2 + 4c}}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$ , на которой лежит

устойчивая неподвижная точка  $P = \left( \frac{1-b - \sqrt{(1-b)^2 - 4c}}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ .

При  $c \rightarrow \frac{(b-1)^2}{4}$  к  $P$  подтягивается седловая точка  $Q = \left( \frac{1-b + \sqrt{(1-b)^2 - 4c}}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ , при  $c = \frac{(b-1)^2}{4}$  они сливаются, и при  $c > \frac{(b-1)^2}{4}$  — исчезают (см. рис. 62).

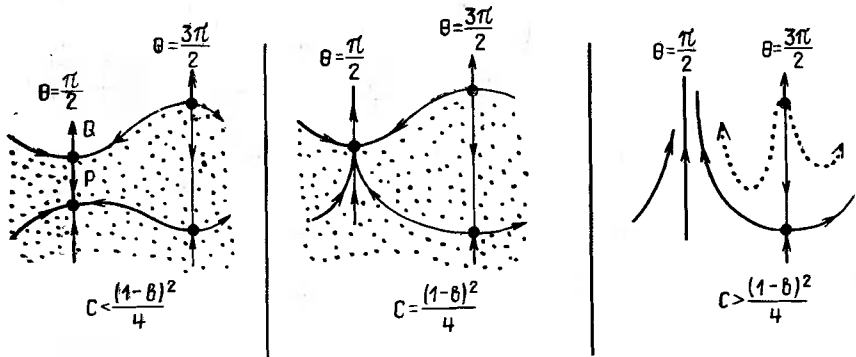


Рис. 62. Кризис замкнутой инвариантной кривой; случай 2

**З а м е ч а н и е.** Бифуркации странных аттракторов также можно разбить на внутренние и кризисы (см., например, [120], [155]). Однако эти бифуркации происходят в классе систем с бесконечным множеством циклов, и их описание выходит за рамки этого обзора.

## Глава 4

### РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В теории бифуркаций обычно рассматриваются системы, зависящие от параметров, значения которых со временем не меняются. Однако в приложениях часто встречаются случаи, когда сами параметры медленно эволюционируют с течением времени. В этой ситуации возникают новые явления — например, устойчивое равновесие по мере изменения параметра может исчезать или делаться неустойчивым, и тогда состояние системы должно быстро (по сравнению со скоростью изменения параметров) перейти к новому режиму движения (аттрактору).

Для систем с медленно меняющимися параметрами характерно присутствие двух масштабов времени и двух скоростей: быстрые движения определяются в основном «замороженной» системой, в которой параметрам («медленным переменным») приданы фиксированные значения; эволюция же параметров с течением времени описывается как «медленное движение» (характер которого может, однако, зависеть от состояния быстрого движения).

Среди таких систем с быстрыми и медленными движениями выделяются системы, в которых быстрое движение приводит к устойчивому состоянию равновесия. Примером могут служить системы с одной быстрой переменной, т. е. с одномерным фазовым пространством быстрого движения. Такая система общего положения при фиксированном значении медленных переменных быстро приходит к установившемуся состоянию покоя. Этот процесс быстрого установления равновесия называется релаксацией. В процессе изменения медленных переменных устойчивое равновесие может (через большое в масштабе быстрых движений время) исчезнуть или потерять устойчивость. Тогда снова произойдет релаксация (скачок к другому состоянию равновесия) и т. д. Возникающий процесс, состоящий из периодов, в течение которых быстрая система находится в квазиравновесном состоянии (отрелаксировала) и почти мгновенных (по сравнению с этими периодами) скачков из одного состояния равновесия быстрой системы в другое называется процессом релаксационных колебаний (термин, принадлежащий Ван дер Полю [206]).

Релаксационные колебания могут быть периодическими, однако возможно и более сложное поведение (например, сто-

хастизация релаксационных колебаний, когда промежутки между последовательными перескоками выглядят как случайная последовательность).

При изучении релаксационных колебаний обычно наибольший интерес представляет асимптотика медленного движения при стремлении к нулю малого параметра  $\varepsilon$ , определяющего отношение скоростей быстрого и медленного движения. При этом важно исследовать поведение системы за время, при котором сильно меняются медленные переменные (для периодических релаксационных колебаний — за много периодов). Если масштаб времени выбран так, что характерное время быстрого движения порядка 1 («быстрое время»), то медленное движение следует изучать на временах, больших по меньшей мере по сравнению с временем  $1/\varepsilon$  заметного изменения медленных переменных.

Если перейти к «медленному времени»  $\tau = \varepsilon t$ , то в пределе, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , релаксация будет происходить мгновенно и движение системы будет описываться как кусочно-разрывное. Обычно в приложениях наиболее важно именно это предельное кусочно-разрывное движение. В промежутках между скачками оно описывается дифференциальными уравнениями с фазовым пространством меньшей размерности (равной числу медленных переменных), однако перескоки в моменты разрыва определяются быстрым движением.

Описание колебаний как релаксационных широко применяются в естествознании и технике (модели тормозного устройства в механике, мультивибратора в радиофизике, реакции Белоусова—Жаботинского в химии, функционирования нервных клеток в биологии и т. д.).

Первые два параграфа этой главы написаны В. И. Арнольдом, § 3 (кроме п. 3.7) — Ю. С. Ильяшенко, п. 3.7. — Н. Х. Розовым, § 4 — А. И. Нейштадтом, § 5 — А. К. Звонкиным.

## § 1. Основные понятия

Начнем с примера.

**1.1. Пример. Уравнение Ван дер Поля.** Простейшим примером системы, совершающей релаксационные колебания, является система Ван дер Поля

$$\dot{x} = y - x^3 + x, \quad \dot{y} = -\varepsilon x.$$

При  $\varepsilon = 0$  медленное переменное  $y$  становится параметром.

Быстрое переменное  $x$  релаксирует тогда к устойчивому положению равновесия (рис. 63)

Если  $\varepsilon > 0$  (но малое), то отрелаксировавшая система медленно движется вдоль кривой состояний равновесия быстрых

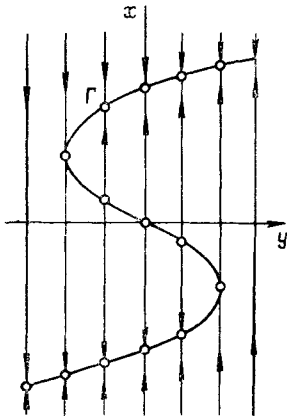


Рис. 63. Система Ван дер Поля при  $\epsilon=0$

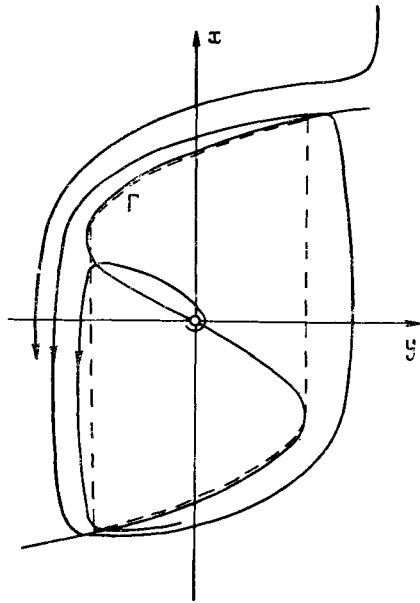


Рис. 64. Система Ван дер Поля при малом  $\epsilon>0$

движений ( $\Gamma$  на рис. 64) влево на верхней и вправо на нижней части кривой  $\Gamma$ . В точках кривой с вертикальной касательной система совершает скачки. В результате формируется предельный цикл (рис. 64)

**1.2. Быстрые и медленные движения.** Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящую от параметров. Иными словами, пусть дано гладкое расслоение  $E \rightarrow B$  и вертикальное (касающееся слоев) векторное поле на  $E$ .

**О п р е д е л е н и е.** Уравнение, заданное вертикальным полем, называется *невозмущенным уравнением* или *уравнением быстрых движений*.

Для системы Ван дер Поля  $E$  — фазовая плоскость,  $B$  — ось  $y$ . Уравнение быстрых движений:  $\dot{x} = y - x^3 + x$ ,  $\dot{y} = 0$ .

В общем случае (локальные) координаты на  $E$  можно выбрать так, что невозмущенное уравнение быстрых движений примет вид

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = 0 \quad (1)$$

( $y \in \mathbb{R}^m$  — координаты на базе,  $x \in \mathbb{R}^l$  — вдоль слоя). Переменные  $x$  называются быстрыми,  $y$  — медленными.

**Определение.** *Возмущенным уравнением или уравнением с быстрыми и медленными движениями* называется однопараметрическая деформация уравнения быстрых движений.

Такая деформация задается однопараметрическим семейством полей, содержащим исходное вертикальное поле при нулевом значении параметра<sup>1)</sup>. В координатах возмущенное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y, \varepsilon), & \dot{y} &= \varepsilon G(x, y, \varepsilon), \\ F(x, y, 0) &= f(x, y).\end{aligned}\tag{2}$$

### 1.3. Медленная поверхность и медленное уравнение.

**Определение.** Множество особых точек уравнения быстрого движения называется *медленной поверхностью*.

Для системы Ван дер Поля — это кубическая парабола  $\Gamma$ . Для вертикального поля общего положения медленная поверхность — гладкое многообразие. Размерность этого многообразия равна размерности базы расслоения (числу медленных переменных). В точках общего положения медленная поверхность локально является сечением расслоения, т. е. диффеоморфно проектируется на базу.

Однако в целом проектирование, вообще говоря, не диффеоморфное. Например, кубическая парабола системы Ван дер Поля имеет две точки с вертикальной касательной.

Рассмотрим точки, в окрестности которых медленная поверхность проектируется диффеоморфно. Таковы точки, в которых отличны от нуля все собственные числа линеаризации уравнения быстрых движений на фиксированном слое (т. е. при фиксированных значениях медленных переменных) — по теореме о неявной функции. Такие точки назовем *регулярными*.

В регулярных точках на медленной поверхности возникает векторное поле — поле медленной скорости. Оно определяется проекцией возмущения исходного вертикального поля на касательную плоскость медленной поверхности вдоль слоев расслоения.

**Определение.** *Вектором медленной скорости* в регулярной точке медленной поверхности называется производная по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon=0$  проекции вектора возмущенного поля на касательную плоскость медленной поверхности вдоль слоя расслоения.

<sup>1)</sup> В действительности релаксационные колебания происходят во всех системах, близких к исходной, и следовало бы изучать просто окрестность невозмущенного поля в подходящем функциональном пространстве. Однако здесь, как и в других задачах теории возмущений, ради математического удобства формулировки результата исследования как асимптотического обычно вводится (более или менее искусственно) малый параметр  $\varepsilon$  и вместо окрестности рассматриваются однопараметрические деформации. Положение здесь такое же, как с понятием вариации: производная по направлению вектора (дифференциал Гато) предшествует производной отображения (дифференциалу Фреше) в историческом развитии.



Таким образом, медленная поверхность снабжается векторным полем медленной скорости (определенным в регулярных точках). Это поле задает на медленной поверхности *медленное уравнение*. В координатах, введенных выше, медленное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, & \frac{dy}{d\tau} &= g(x, y), \\ g(x, y) &= G(x, y, 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Пример. Уравнение медленного движения системы Ван дер Поля:

$$y = x^3 - x, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x;$$

здесь  $\tau = \varepsilon t$  — медленное время.

Уравнение медленного движения есть уравнение эволюции медленных переменных при условии, что быстрые поддерживаются в равновесных состояниях. Основной замысел теории релаксационных колебаний — построение асимптотик истинного возмущенного движения из сменяющихся отрезков быстрого и медленного движений.

При подходе к нерегулярным точкам общего положения (складкам проектирования) скорость медленного движения (по отношению к медленному времени) стремится к бесконечности обратно пропорционально расстоянию до складки вдоль медленной поверхности.

**1.4. Медленное движение как аппроксимация возмущенного.** Рассмотрим уравнение медленного движения по медленной поверхности

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x, y).$$

Предположим, что 1) решение этого уравнения определено на отрезке  $0 \leq \tau \leq T$  и 2) все точки фазовой кривой этого медленного движения на медленной поверхности являются гиперболическими притягивающими точками для быстрого движения (собственные значения особых точек быстрого уравнения лежат в левой полуплоскости).

Пример. Для системы Ван дер Поля эти условия выполнены, если соответствующий  $0 \leq \tau \leq T$  отрезок фазовой кривой медленного движения не пересекается с другой медленной кривой  $\Gamma$ , соединяющей нерегулярные точки, где касательная к  $\Gamma$  вертикальна — иными словами, изучаемое медленное движение происходит либо целиком по самой верхней, либо целиком по самой нижней из трех ветвей медленной кривой.

**Теорема ([53], [68], [102]).** При условиях 1 и 2 существует такая (не зависящая от  $\varepsilon$ ) окрестность рассматриваемой фазовой кривой медленного движения, что для достаточно ма-

ных  $\varepsilon > 0$  решение возмущенного уравнения с любым начальным условием из этой окрестности, лежащим в слое над начальной точкой рассматриваемой фазовой кривой медленного движения, определено при  $0 \leq \tau \leq T$  и отличается от рассматриваемого медленного движения не больше, чем на  $C_1\varepsilon$  на всем этом отрезке времени, исключая короткий (в медленном времени) начальный отрезок  $0 \leq \tau \leq C_2\varepsilon \ln \varepsilon$ , на котором решение близко к быстрому движению вдоль начального слоя (здесь константы  $C_1 > 0$  и  $C_2 > 0$  не зависят от  $\varepsilon > 0$  и от начальной точки, а при естественных условиях равномерности притяжения не зависят и от исходной фазовой кривой медленного движения). Исключительный начальный отрезок возникает потому, что быстрой системе требуется время порядка  $\ln(1/\varepsilon)$  для релаксации к невырожденному равновесию  $\blacktriangle$ .

**1.5. Явление срыва.** Кроме устойчивых положений равновесия быстрого движения, медленная поверхность содержит, вообще говоря, и неустойчивые. Поэтому фазовая кривая медленного движения может за конечное медленное время попасть на границу устойчивости быстрого движения, и тогда предыдущая теорема делается неприменимой.

**Пример.** Для системы Ван дер Поля движение по верхней ветви медленной кривой направлено влево и приводит в нерегулярную точку, за которую медленное движение не продолжается.

В этом примере возмущенное движение, начиная с указанного момента, теряет связь с медленным: происходит «срыв» с медленной кривой (релаксация к другому положению равновесия, т. е. перескок на нижнюю ветвь).

Аналогичное явление срыва происходит и в других системах общего положения. В соответствии с общей теорией, потеря устойчивости положения равновесия системы уравнений общего положения, зависящих от параметров (в данном случае — уравнений быстрого движения), происходят на двух гиперповерхностях пространства параметров (в данном случае — пространства медленных переменных).

Одна из этих гиперповерхностей соответствует столкновению устойчивого положения равновесия с неустойчивым, после которого оба положения равновесия исчезают (становятся комплексными). На медленной поверхности это явление наблюдается в нерегулярных точках (критических точках проектирования медленной поверхности на базу); в этих точках линеаризация быстрого уравнения в слое имеет нулевое собственное число. Например, для системы Ван дер Поля срыв происходит в точках вертикальности касательной к медленной кривой.

Вторая гиперповерхность потери устойчивости соответствует переходу двух комплексно сопряженных собственных чисел линеаризации быстрого уравнения в положении равновесия из

левой полуплоскости в правую. Это явление наблюдается, вообще говоря, в некоторых регулярных точках медленной поверхности, образующих на этой поверхности подмножество коразмерности один (подробнее об этом см. § 4). На подмножествах большей коразмерности происходят и более сложные явления, например, сочетание нулевого корня с мнимой парой и т. д.

В обоих случаях возмущенные движения после потери устойчивости соответствующего состояния равновесия быстрого движения срываются с медленной поверхности, но их дальнейшие судьбы, вообще говоря, различны.

В первом случае (исчезновение равновесия) потеря устойчивости всегда является «жесткой»: быстрое движение, вообще говоря, приводит фазовую точку на какой-либо другой аттрактор (а иногда выкидывает «на бесконечность», что физически означает взрывной характер процесса). Этот аттрактор может оказаться, например, предельным циклом или тором, и тогда для изучения дальнейшего движения можно использовать технику метода усреднения (Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский [26 : 17]).

Новый аттрактор может оказаться и просто лежащим в стороне устойчивым положением равновесия быстрого движения. Именно так обстоит дело для системы Ван дер Поля и, вообще, для систем с одной быстрой переменной (так как типичные движения системы общего положения с одномерным фазовым пространством приближаются к невырожденным устойчивым положениям равновесия).

В случае многих быстрых переменных движение релаксирует к равновесию, когда быстрая система является градиентной:

$$\dot{x} = \frac{\partial U(x, y, \varepsilon)}{\partial x}, \quad \dot{y} = \varepsilon G(x, y, \varepsilon).$$

Такенс [204] назвал эту систему «системой со связями».

Второй случай — потеря устойчивости особой точкой быстрого движения с переходом пары собственных значений через мнимую ось, исследован в § 4.

## § 2. Особенности быстрого и медленного движений

Здесь приведены нормальные формы различных объектов вблизи нерегулярных точек медленной поверхности, где может происходить срыв. Мы рассматриваем системы общего положения и показываем, какие результаты дает общая теория особенностей в применении к релаксационной ситуации.

**2.1. Особенности быстрого движения в точках срыва систем с одной быстрой переменной.** Особенности проектирования медленной поверхности на базу описываются общей теорией особенностей дифференцируемых отображений [25]. Если быстрая

переменная одна, то имеется конечный список таких особенностей, встречающихся в системах общего положения. В подходящих (гладких, аналитических) локальных координатах медленная поверхность записывается в виде *нормальной формы Уитни*  $P_\mu(x, y) = 0$ .

$$P_\mu = x^{\mu+1} + y_1 x^{\mu-1} + \dots + y_\mu.$$

Здесь  $(y_1, \dots, y_\mu)$  — медленные переменные (быть может, часть медленных переменных); значение  $\mu$  не должно превосходить размерности базы, но может быть меньшим.

Приведение медленной поверхности к нормальной форме Уитни осуществляется локальным расслоенным диффеоморфизмом, т. е. диффеоморфизмом пространства расслоения, переводящим слои в слои:  $x = h(X, Y)$ ,  $y = k(Y)$ .

*Пример.* В системах общего положения с одной быстрой и одной медленной переменной реализуется только складка ( $x^2 + y = 0$ ), как в точках с вертикальной касательной на медленной кривой системы Ван дер Поля.

В системах общего положения с одной быстрой и двумя медленными переменными реализуются складка ( $x^2 + y_1 = 0$ ) и и сборка ( $x^3 + xy_1 + y_2 = 0$ ). Нерегулярные точки образуют в этом случае гладкую кривую — *линию складки* — на медленной поверхности. В отдельных *точках сборки* эта кривая вертикальна (касается слоя расслоения; см. рис. 65). Множество критических значений проектирования (на плоскости медленных переменных  $y$ ) имеет в проекциях сборок острия (точки возврата). В окрестности острия линия критических значений проектирования диффеоморфна полукубической параболе.

Уравнение быстрых движений аналитической системы общего положения в окрестности медленной поверхности можно аналитическим расслоенным диффеоморфизмом привести к нормальной форме  $\dot{x} = P/E$ , где  $P$  — функция нормальной формы Уитни, а  $E = \pm 1 + C(y)x^n$ .

Например, при одной быстрой и одной медленной переменной:

$$\dot{x} = C(y)x \text{ (регулярная точка),}$$

$$\dot{x} = (x^2 + y)(1 + C(y)x)^{-1} \text{ (точка срыва).}$$

Функциональный параметр (модуль)  $C$  в этом случае неустрашим, ибо сумма вычетов дифференциальной формы  $dt$  в близких к нулю точках — инвариант диффеоморфизмов оси  $x$ .

При одной быстрой и двух медленных переменных в окрестности общей точки складки нормальная форма быстрого уравнения

$$\dot{x} = x^2 + y_1 + (C + y_2)x^3,$$

где  $C$  уже не функция, а число.

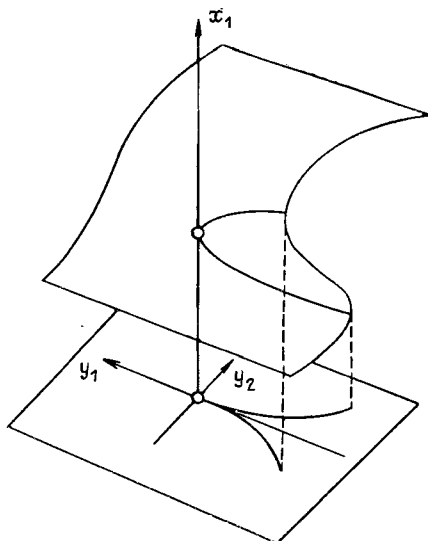


Рис. 65. Сборка медленной поверхности

## 2.2. Особенности проектирования медленной поверхности.

При большом единицы числе  $k$  быстрых переменных нормальная форма медленной поверхности системы общего положения остается такой же, как выше (добавляются лишь уравнения  $x_2 = \dots = x_k = 0$ ), если размерность ядра проектирования медленной поверхности на пространство медленных переменных в рассматриваемой точке равна 1, т. е. если нулевое собственное число линеаризации уравнения быстрого движения в рассматриваемом положении равновесия при фиксированных значениях медленных переменных однократно.

Последнее условие (одномерность ядра) выполняется автоматически для систем общего положения при любом числе быстрых переменных, когда число медленных переменных не больше трех. Таким образом, в типичных системах с одним, двумя и тремя медленными переменными уравнение медленной поверхности локальным расслоенным диффеоморфизмом приводится к одному из видов

$$x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ (регулярная точка),}$$

$$x_1^2 - y_1 = x_2 = \dots = x_k = 0 \text{ (складка),}$$

$$x_1^3 + y_1 x_1 + y_2 = x_2 = x_k = 0 \text{ (сборка),}$$

$$x_1^4 + y_1 x_1^2 + y_2 x_1 + y_3 = x_2 = \dots = x_k = 0.$$

В последнем случае множество критических значений проектирования — поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , называемая ласточкиным хвостом

(рис. 56). При четырех медленных переменных впервые появляются более сложные особенности (с двумерным ядром), но список остается конечным вплоть до 9 медленных переменных.

### 2.3. Медленное движение систем с одной медленной переменной.

**Теорема.** В окрестности точки срыва уравнение медленных движений системы общего положения с одной быстрой и одной медленной переменной расложенным диффеоморфизмом медленной кривой приводится к виду

$$y = x^2, \quad \dot{y} = \pm 1 + xA(y),$$

причем  $A$  является инвариантом действия группы таких замен. Приводящий диффеоморфизм гладок (аналитичен) для гладкой (аналитической) системы.

**Следствие.** Медленное движение приводится к виду  $y = \pm t + t^{3/2}a(t)$ , а если допустить  $C^\infty$ -замены времени — то к виду

$$y = \pm t + t^{3/2}.$$

**Доказательство теоремы и следствия из нее:**

1°. Представим медленное уравнение в виде

$$y = x^2, \quad \dot{y} = b(y) + \alpha A(y).$$

Это равносильно разбиению функции  $g(x, x^2)$  на четное и нечетное слагаемые. Для системы общего положения  $b(0) \neq 0$ . Заменой

$$y = z(c_0 + c_1 z + \dots), \quad x = u(d_0 + d_1 u^2 + \dots)$$

медленное уравнение можно привести к виду

$$z = u^2, \quad \dot{z} = \pm 1 + uA(z).$$

Два медленных уравнения с разными  $A$  не переводятся друг в друга послойными диффеоморфизмами медленной кривой, поскольку отношение  $(1 + uA(z))/(1 - uA(z))$  инвариантно относительно таких диффеоморфизмов. Это доказывает теорему.

2°. Уравнение медленного движения можно записать в виде (пишем снова  $(x, y)$  вместо  $(z, u)$ ):

$$y = x^2, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{2x}{\pm 1 + xA(y)}.$$

Отсюда

$$t(x) = \pm x^2 + x^3 B(x), \\ y(x) = x^2.$$

По теореме Дюфура [140]  $C^\infty$ -заменами  $z + z(y)$ ,  $\tau = \tau(t)$  пару функций  $t, y$  (для системы общего положения) можно

привести к виду

$$\begin{aligned}\tau(x) &= x^2 + x^3, \\ z(x) &= x^2.\end{aligned}$$

Следствие доказано.

**З а м е ч а н и е.** Аналогичная нормализация с помощью аналитической замены, как правило, не возможна [56].

**2.4. Медленное движение систем с двумя медленными переменными.** В этом случае можно довольно подробно изучить семейство фазовых кривых медленного движения: вопрос сводится к теории дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Для простоты мы считаем, что быстрая переменная одна. Медленное движение в системах общего положения с любым числом быстрых переменных и всего двумя медленными такое же, как в случае с одной быстрой переменной. Действительно, для систем общего положения менее чем с четырьмя медленными переменными ядро проектирования медленной поверхности одномерно.

Поэтому все быстрые переменные, кроме одной, можно выбрать так, что они будут равны нулю на всей медленной поверхности (см. выше п. 2.2). Поведение системы при ненулевых значениях этих переменных не сказывается на медленном поле, поэтому при исследовании медленного движения о них можно забыть.

Итак, пусть пространство  $E$  расслоения  $E \rightarrow B$  трехмерно, база двумерна, а слои одномерны. В каждой точке этого трехмерного пространства имеется вертикальное направление (касательное слою, вдоль которого обе медленные переменные постоянны). В неособых точках возмущающего поля<sup>1)</sup> имеется еще одно направление. Особые точки для систем общего положения не лежат на медленной поверхности. Поэтому мы их не рассматриваем, и в интересующих нас точках пространства  $E$  заданы два поля направлений: вертикальное и возмущающее.

Для систем общего положения эти поля коллинеарны лишь в точках некоторой гладкой кривой, и эта кривая трансверсально пересекает медленную поверхность в ее регулярных точках.

Эти точки пересечения — положения равновесия медленного уравнения. Поскольку они регулярны, это обычные особые точки гладкого (медленного) векторного поля на поверхности (узлы, седла, фокусы). К их исследованию применима обычная локальная теория [26].

Нас же интересуют особые точки проектирования медленной поверхности. В этих точках наши поля направлений неколлинеарны. Следовательно, они порождают гладкое поле плоскостей.

---

<sup>1)</sup> *Возмущающее поле* — это значение производной возмущенного поля по малому параметру  $\varepsilon$  при  $\varepsilon=0$ .

Гладкое поле плоскостей общего положения в окрестности точки общего положения задает контактную структуру (если поле задано как поле нулей 1-формы  $\alpha$ , то 3-форма  $\alpha \wedge d\alpha$  невырождена).

Точки вырождения контактной структуры, задаваемой полем плоскостей общего положения в трехмерном пространстве, образуют поверхность. Эта поверхность вырождения контактной структуры для системы общего положения трансверсально пересекается с медленной поверхностью по кривой. Более того, она может в отдельных точках трансверсально пересекать гладкую кривую нерегулярных точек проектирования медленной поверхности (кривую складок). Для системы общего положения точки пересечения будут именно точками складки, а не сборки.

Рассмотрим теперь следы построенного выше поля плоскостей в трехмерном пространстве на медленной поверхности.

Плоскость поля пересекает касательную плоскость медленной поверхности в регулярной точке по направлению медленного поля. Поэтому следы построенного поля плоскостей образуют в регулярной части медленной поверхности в точности поле направлений медленного движения.

Это поле направлений продолжается и на линию критических точек проектирования в виде гладкого поля направлений. Особенности оно имеет лишь в тех местах, где плоскость поля касается медленной поверхности. Это может случиться для системы общего положения лишь в отдельных точках. Такие точки лежат обязательно на кривой складок, так как плоскость поля содержит вертикальное направление.

Для систем общего положения эти отдельные точки не будут ни точками сборки, ни точками вырождения контактной структуры.

Итак, фазовые кривые медленного движения являются частями интегральных кривых поля следов построенных выше плоскостей на медленной поверхности. Это поле направлений на медленной поверхности вертикально на линии критических точек проектирования (ибо и поле плоскостей, и касательная медленной поверхности в этих точках содержат вертикаль), и может еще иметь отдельные особые точки на этой линии (не в сборках и не в точках вырождения контактной структуры).

Ниже описаны нормальные формы, к которым приводятся интегральные кривые построенного поля направлений на медленной поверхности (а следовательно, и фазовые кривые медленного уравнения) расслоенными диффеоморфизмами.

**2.5. Нормальные формы фазовых кривых медленного движения.** В окрестности точки складки медленная поверхность расслоенным диффеоморфизмом приводится к виду  $y = x^2$ , где  $x$  — быстрая переменная,  $y$  — медленная; вторую медленную переменную обозначим  $z$ .



Интегральные кривые, которые мы изучаем, лежат, таким образом, на поверхности  $y=x^2$  трехмерного пространства с координатами  $(x, y, z)$  и проектируются вдоль оси  $x$  на плоскость  $(y, z)$ .

**Теорема.** (В. И. Арнольд, 1984). В окрестности точки складки проектирования медленной поверхности системы общего положения с двумя медленными и одной быстрой переменной семейство интегральных кривых уравнения медленных движений расслоенным диффеоморфизмом медленной поверхности приводится к одной из следующих нормальных форм:

$$z = x^3 + c \text{ (общая точка складки),} \quad (4)$$

$$z = x^3 z + x^5 + c \text{ (точка вырождения контактной структуры),} \quad (5)$$

$$x dx = (2x + az) dz \text{ (особые точки поля направлений),} \quad (6)$$

где медленная поверхность имеет уравнение  $y=x^2$ .

Особые точки последнего типа могут быть на медленной поверхности фокусами ( $a < -1$ ), узлами ( $-1 < a < 0$ ) или седлами ( $0 < a$ ).

Проекция интегральных кривых с медленной поверхности на плоскость медленных переменных  $(y, z)$  в первом случае имеют полукубические особенности  $y^3 = (z-c)^2$  (рис. 66)

В случае вырождения контактной структуры проекция ин-

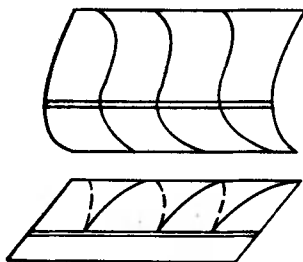


Рис. 66. Фазовые кривые медленного уравнения в окрестности типичной точки складки медленной поверхности: нормальная форма

тегральных кривых изображены на рис. 67. Эти проекции можно описать так. Рассмотрим поверхность «сложенного зонтика Уитни»  $u^2 = v^3 \omega^2$  в трехмерном пространстве. Спроектируем линии уровня функции  $u + v + \omega$  на этой поверхности на плоскость  $v, \omega$ . Получится нужное семейство линий на плоскости.

Проекция интегральных кривых в окрестности фокуса, узла и седла на плоскость медленных переменных изображены на рис. 68. Это — сложенные особенности, нормальные формы ко-

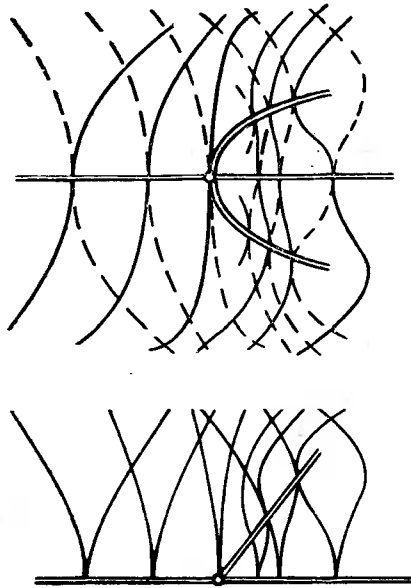


Рис. 67. Фазовые кривые медленного уравнения в окрестности точки вырождения контактной структуры. Множество точек касания интегральных кривых с их отражениями изображается двойной линией

торых найдены А. А. Давыдовым (1984, см. [26], [24]). Их можно задать уравнением, неразрешенным относительно производной, вида

$$y = \left( \frac{dy}{dz} + kz \right)^2.$$

В окрестности точки сборки проекции описываются так. Рассмотрим поверхность ласточкиного хвоста  $\{ \lambda : x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \}$  имеет кратный корень}. Плоскости  $\lambda_1 = \text{const}$  разбивают ласточкин хвост на кривые. Проекция интегральных кривых в окрестности точки сборки проектирования медленной поверхности системы общего положения получаются из этого стандартного семейства плоских сечений ласточкиного хвоста при гладком отображении общего положения трехмерного пространства на плоскость. Такое отображение имеет в вершине ласточкиного хвоста ранг 2. Следовательно, окрестность вершины гладко расслоена на одномерные слои (прообразы точек плоскости). Направление слоя в вершине трансверсально и плоскости  $\lambda_1 = 0$ , и касательной плоскости хвоста ( $\lambda_3 = 0$ ) для отображения общего положения. В зависимости от того, как это направление пересекает эти две плоскости, вид проекции

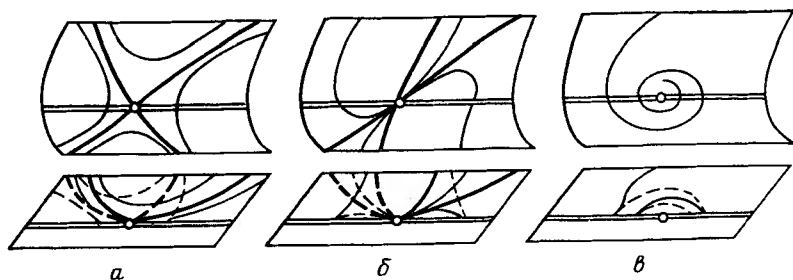


Рис. 68. Типичные особые точки медленного уравнения на складке медленной поверхности

явно меняется (рис. 69). Впрочем, проекции семейств интегральных кривых имеют (менее заметные) топологические функциональные модули, если учитывать проекции интегральных кривых со всех трех ветвей медленной поверхности. Если же учесть только ветви, отвечающие устойчивости равновесия в быстрой системе, то топологически различных картин общего положения всего три (рис. 70) (первые две соответствуют устойчивости равновесия на крайних ветвях, третья — на средней ветви медленной поверхности.)

Топологическая классификация особенностей медленных движений в системах общего положения с двумя медленными и одной быстрой переменными, учитывающая только устойчивые положения равновесия быстрого движения, дана Такенсом [204].

**2.6. Связь с теорией уравнений, не разрешенных относительно производной.** Рассмотрим точку, где наше поле плоскостей невырождено (задает контактную структуру)<sup>1)</sup>. Слои нашего расслоения касаются плоскостей поля. Значит, расслоение лежандрово (состоит из интегральных многообразий максимальной размерности). Все лежандровы расслоения в контактном пространстве фиксированной размерности локально контактоморфны (переводятся друг в друга вместе с контактной структурой диффеоморфизмом в окрестности каждой точки пространства расслоения). Следовательно, наше трехмерное пространство быстрых и медленных переменных с введенной контактной структурой расслоенным (над плоскостью медленных переменных) локальным диффеоморфизмом переводится в трехмерное пространство 1-струй функций одного переменного, расслоенного над пространством 0-струй, с его естественной контактной структурой.

<sup>1)</sup> О контактных структурах и лежандровых расслоениях см. подробнее статью В. И. Арнольда и А. Б. Гивенталя в томе 4 настоящего издания. Остальная часть § 2 может читаться независимо от этой статьи.

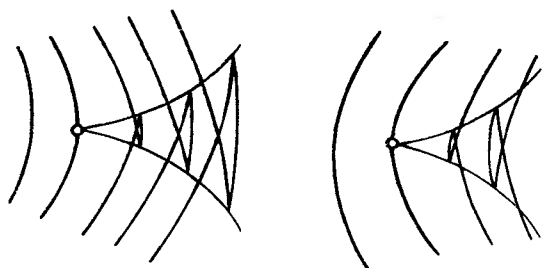


Рис. 69. Проекция фазовых кривых медленного уравнения вблизи точки сборки на плоскость медленных переменных

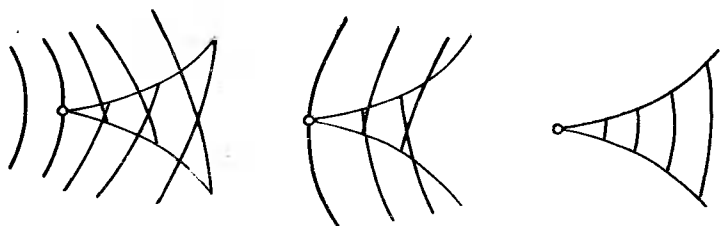


Рис. 70. Проекция фазовых кривых с устойчивых ветвей медленной поверхности вблизи точки сборки на плоскость медленных переменных

В координатах 1-струя определяется значением независимой переменной, которую мы обозначим через  $z$ , зависимой (обозначим ее  $y$ ) и производной  $dy/dz$  (обозначаемой  $p$ ). Контактная структура пространства 1-струй в координатах записывается в виде  $dy = pdz$ , проекция на 0-струю — забывание  $p: (z, y, p) \mapsto (z, y)$ .

Поверхность медленных движений и ее проектирование на плоскость медленных переменных вдоль оси быстрых переменных при указанном отображении в пространство 1-струй перейдет в поверхность, заданную неявным дифференциальным уравнением

$$F(z, y, p) = 0, \quad p = dy/dz,$$

и ее проектирование в пространство 0-струй вдоль оси  $p$ . Интегральные кривые нашего поля на медленной поверхности превращаются в интегральные кривые неявного уравнения.

Поэтому сформулированная выше теорема для всех случаев, кроме случая вырождения контактной структуры, вытекает из соответствующих результатов теории неявных уравнений. При этом нормализующий диффеоморфизм приводит к нормальной форме не только интегральные кривые следов поля контакт-

ных плоскостей на поверхности, но и все поле контактных плоскостей. В терминах теории релаксационных колебаний это означает, что проекция направления возмущающего поля на плоскость медленных переменных приводится расслоенным диффеоморфизмом к стандартному виду не только на медленной поверхности, но и во всей окрестности изучаемой точки в трехмерном пространстве.

**2.7. Вырождение контактной структуры.** В этом случае можно рассуждать так. Складывание определяет инволюцию медленной поверхности, переставляющую обе точки одного слоя. В окрестности точки складки медленная поверхность приводится к нормальной форме  $y=x^2$  расслоенным диффеоморфизмом ( $y$  — медленная,  $x$  — быстрая переменная). Будем пользоваться на медленной поверхности локальными координатами  $(x, z)$ , где  $z$  — вторая медленная переменная. Тогда указанная выше инволюция запишется в виде  $(x, z) \mapsto (-x, z)$ .

Интегральные кривые на медленной поверхности образуют в окрестности изучаемой точки гладкое семейство, и их можно задать как семейство линий уровня некоторой функции,  $\Phi(x, z) = \text{const}$ . Линии эти в точках складки касаются ядра складывания, т. е. направления оси  $x$ . Значит, функцию  $\Phi$  можно, не меняя ни медленной поверхности, ни семейства линий уровня, привести к виду  $z+x^2A(x, z)$ .

Заменяя медленную переменную  $z$  на функцию от  $z$  и  $y=x^2$ , мы осуществляем не меняющий медленной поверхности расслоенный диффеоморфизм ( $y$  — медленная переменная). Таким перевыбором  $z$  мы можем уничтожить в  $A$  всю четную по  $x$  часть. Мы привели  $\Phi$  к виду  $z+x^3B(x^2, z)$ .

Рассмотрим теперь, наряду с семейством линий  $\Phi = \text{const}$ , его образ при инволюции, меняющей знак  $x$ . В точках складки ( $x=0$ ) линии обоих семейств касаются друг друга, причем порядок касания четен (как касания прямой и параболы нечетной степени). Если в изучаемой точке  $B \neq 0$ , то порядок касания второй.

Легко проверить, что именно в этом состоит условие невырожденности (контактности) поля плоскостей, следы которого на медленной поверхности определяют наши интегральные кривые.

В точке вырождения  $B(0, z)$  обращается в нуль. Для системы общего положения порядок нуля первый, а порядок касания интегральной кривой со своим отображением подскакивает со второго до четвертого. Это позволяет привести уравнение интегральных кривых к виду  $z+x^3zC(x^2, z)+x^5D(x^2) = \text{const}$ ,  $C(0, 0) \neq 0$ ,  $D(0) \neq 0$ .

Нечетной заменой  $x' = x\sqrt{C(x^2, z)}$  и растяжениями мы можем привести уравнение к виду

$$z + x^3z + x^5 + x^7E(x^2, z) = c.$$

Наконец, слагаемое с  $E$  можно полностью уничтожить, комбинируя  $C^\infty$ -диффеоморфизм плоскости  $(x, z)$ , коммутирующий с меняющей знак  $x$  инволюцией, с  $C^\infty$  — изменением нумерации кривых (параметра  $c$ ).

Для этого нужно сначала рассмотреть линию, где интегральные кривые касаются своих образов при инволюции. Эта линия (симметричная относительно оси  $x=0$ ), кроме оси  $x=0$ , содержит кривую, похожую на параболу:  $z = -\frac{5}{3}x^2 + \dots$  (рис. 67). На этой кривой имеются две инволюции: одна представляет  $x$  и  $-x$ , другая — две точки на одной интегральной кривой. Различие между обеими инволюциями порядка  $x^4$ .

Такая пара инволюций (единым) локальным  $C^\infty$ -диффеоморфизмом кривой приводится к нормальной форме (например: одна к  $x \mapsto -x$ , другая к  $x \mapsto x'$ , где  $x^2 + x^5 = x'^2 + x'^5$ , Дюфур [140]). В аналитическом случае такая пара инволюций, несмотря на простую формальную нормальную форму, имеет функциональные модули (С. М. Воронин [56]).

Выберем координату  $x$  на кривой касания так, чтобы нормализовать обе инволюции. Будем нумеровать этой координатой и касающуюся в этой точке своего образа при инволюции интегральную кривую. Полученная нумерация позволяет сопоставить друг другу интегральные кривые семейств с  $E \neq 0$  и с  $E = 0$  (те, которые касаются отраженных).

Точке пересечения интегральной кривой семейства с  $E \neq 0$  с номером  $x_1$  и отраженной кривой с номером  $x_2$  сопоставим (топологически аналогичную) точку пересечения кривых с такими же номерами для стандартного семейства ( $E=0$ ). Полученное соответствие продолжается до диффеоморфизма, коммутирующего с инволюцией и отображающего семейство линий с  $E \neq 0$  на стандартное семейство.

Спроектируем стандартное семейство линий

$$z + x^3z + x^5 = c$$

на плоскость медленных переменных  $(y, z)$ . Семейство проекций задается уравнением

$$(z-c)^2 = y^3(z+y)^2, \text{ ибо } y = x^2.$$

Поднимем каждую проекцию на свой уровень  $c$ . Получаем поверхность в трехмерном пространстве с координатами  $(y, z, c)$ .

В этом пространстве выбираем новые координаты  $z-c = u$ ,  $y = v$ ,  $z+y = -w$ . Уравнение поверхности теперь  $u^2 = v^3w^2$ .

Если зафиксировать значение  $c = c_0$ , то на полученной плоской кривой  $u + v + w = -c_0$ . Отсюда  $y = v$ ,  $z = u + c_0 = -u - w$ . Поэтому семейство проекций интегральных кривых на плоскость медленных переменных  $(y, z)$  локально диффеоморфно семейству проекций плоских сечений  $u + v + w = \text{const}$  сложенного зонтика  $u^2 = v^3w^2$  на плоскость  $(v, w)$  вдоль оси  $w$ .

Разбиение сложенного зонтика  $u^2 = v^3 w^2$  на линии уровня гладкой (аналитической) функции общего положения диффеоморфно ( $C^\infty$ , аналитически) разбиению на плоские сечения  $u + v + w = \text{const}$ .

Сложенный зонтик впервые появился в теории особенностей по своему другому поводу (как особенность бикаустики, замечаемой ребрами возврата движущихся каустик, см. [22]). Проведенный выше анализ в этих терминах означает исследование разбиения бикаустики на мгновенные ребра возврата каустик. Сложенным зонтиком эта поверхность названа потому, что она получается из цилиндра над полукубической параболой, лежащего в трехмерном пространстве, при отображении складывания общего положения трехмерного пространства в трехмерное. Сложенный зонтик появляется также в качестве одной из компонент границы многообразия фундаментальных систем решений скалярных линейных уравнений (М. Э. Казанян, 1985).

### § 3. Асимптотика релаксационных колебаний

В этом параграфе исследуется асимптотика по параметру решений уравнения с быстрыми и медленными движениями при стремлении параметра к нулю. Здесь рассматриваются только такие системы, в которых особые точки уравнения быстрых движений теряют устойчивость с изменением медленной переменной в результате обращения в нуль одного (и только одного) из собственных значений линеаризации. Другими словами, уравнение быстрых движений при любом значении медленной переменной имеет не более чем одномерное центральное многообразие. Медленная поверхность в этом случае распадается на устойчивую и неустойчивую части, разделенные «точками срыва» — критическими точками проектирования медленной поверхности на пространство медленных переменных вдоль пространства быстрых. Такие уравнения назовем уравнениями типа 1 в знак одномерности центральных многообразий.

**3.1. Вырожденные системы.** Рассмотрим систему (2) типа 1:

$$\dot{x} = F(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon G(x, y, \varepsilon). \quad (2)$$

Соответствующая ей вырожденная система типа 1 — это система

$$f(x, y) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y),$$

где

$$f(x, y) = F(x, y, 0), \quad g(x, y) = G(x, y, 0).$$

*Фазовая кривая вырожденной системы* — это такая ориентированная кривая, которая состоит из чередующихся участков быстрых и медленных движений, причем временная ориентация на быстрых и медленных участках совпадает с ориентацией всей кривой.

Фазовые кривые вырожденной системы подразделяются на *регулярные фазовые кривые* и *вырожденные утки*. Регулярная фазовая кривая содержит только такие участки медленного движения, которые расположены на устойчивой части медленной поверхности; вырожденные утки содержат дуги медленных фазовых кривых, расположенные на неустойчивой части.

До последнего времени в теории релаксационных колебаний изучались такие быстро-медленные уравнения типа 1, фазовые кривые которых, проходящие вблизи точки срыва, при  $\epsilon \rightarrow 0$  стремились к регулярным фазовым кривым вырожденной системы. Однако недавно обнаружилось, что для некоторых быстро-медленных уравнений фазовые кривые, близкие к точке срыва, при  $\epsilon \rightarrow 0$  могут приближаться к вырожденным уткам. Подробнее об этом сказано в § 5.

**Теорема** ([86], [94]). Пусть  $(x, y) = p$  — точка складки медленной поверхности быстро-медленной системы (2) типа 1 (то есть системы с не более чем одномерными центральными многообразиями положений равновесия быстрых движений). Пусть вектор  $G(x, y, 0)$  трансверсален проекции складки на базу вдоль слоев (то есть проекции складки на пространство медленных переменных вдоль пространства быстрых). Пусть, кроме того, этот вектор направлен наружу по отношению к проекции медленной поверхности на плоскость медленных переменных. Тогда существует такая окрестность  $U$  точки  $p$  в фазовом пространстве, что для любой точки  $q \in U$  связанная компонента пересечения окрестности  $U$  с положительной полутраекторией системы (2) с началом  $q$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  стремится к регулярной фазовой кривой вырожденной системы.

В условиях теоремы вычислена асимптотика решений вблизи точки срыва с точностью до  $O(\epsilon)$  [86], [94].

**3.2. Системы первого приближения.** Произведем замену масштаба в окрестности точки срыва. Коэффициенты растяжения и размеры окрестности зависят от параметра  $\epsilon$  системы (2) так, что при стремлении параметра к нулю образ окрестности при растяжении содержит любой компакт, начиная с достаточно малого (зависящего от компакта) значения параметра. Цель этого построения состоит в том, чтобы, проведя в системе (2) замену переменных, времени и параметра, получить в пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  систему, в которой все движения происходят в одном масштабе времени (так называемую *систему первого приближения*).

**Пример 1.** Случай одного быстрого и одного медленного переменного.



Предложение 1. Типичная система (2) с одной быстрой и одной медленной переменной расслоенным диффеоморфизмом окрестности точки срыва может быть превращена в такую, которая при замене

$$x = \mu x_1, \quad y = \mu^2 y_1, \quad \tau = \mu t, \quad \varepsilon = \mu^3$$

переходит в систему

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - y_1 + O(\mu), \quad \dot{y}_1 = -1 + O(\mu),$$

заданную в области  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ .

Соответствующая система первого приближения имеет вид

$$\dot{x} = x^2 - y, \quad \dot{y} = -1.$$

Предложение 1 доказано в [94] и [86, § 8].

Пример 2. Случай одного быстрого и двух медленных переменных.

Предложение 2. Типичная система (2) с одной быстрой и двумя медленными переменными расслоенным диффеоморфизмом окрестности точки срыва на складке медленной поверхности может быть приведена в такую, которая при линейной замене координат  $f_\mu$ , замене времени  $\tau = \mu t$  и замене параметра  $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$  переходит в систему, совпадающую с точностью до членов порядка  $O(\mu)$  с системой первого приближения в кубе  $|x_1| < 1, |y_1| < 1, |z_1| < 1$ . Замены  $f_\mu$  и  $\varepsilon(\mu)$ , а также системы первого приближения выписаны ниже (см. табл. 1, стр. 186). ▲

В таблице  $x$  — быстрое переменное,  $y$  и  $z$  — медленные, ось  $z$  направлена вдоль складки медленной поверхности, ось  $y$  ей перпендикулярна. Во втором и третьем столбцах приведены нормальные формы из п. 2.5; фазовые кривые медленного уравнения заданы либо первым интегралом, либо соответствующим полем направлений. Предложение 2 доказано в п. п. 3.3, 3.4.

З а м е ч а н и е. Уравнение  $d\xi/d\eta = \xi^2 - \eta$  — одно из простейших уравнений, не интегрируемых в квадратурах.

**3.3. Нормализация быстро-медленных уравнений с двумя медленными переменными при  $\varepsilon > 0$ .**

**Т е о р е м а.** Типичное быстро-медленное уравнение с двумя медленными переменными и одной быстрой в окрестности любой точки на складке медленной поверхности при всех достаточно малых значениях  $\varepsilon$  расслоенным диффеоморфизмом, гладко зависящим от  $\varepsilon$ , может быть превращено в систему

$$\dot{x} = F(x, y, z, \varepsilon), \quad \dot{y} = G_1(x, y, z, \varepsilon), \quad \dot{z} = G_2(x, y, z, \varepsilon),$$

для которой поверхность  $F=0$  имеет вид  $y=x^2$ , а поле направлений, полученное на этой поверхности, как след поля

Таблица 1

Тип точки на складке	Уравнение медленной поверхности	Фазовые кривые медленного уравнения	Замена $f\mu$ : $(x, y, z) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$	Замена $\varepsilon(\mu)$	Система первого приближения
1. Неособая точка, в которой контактная структура невырождена	$y = x^2$	$z - x^3 = c$	$x = \mu\xi$ $y = \mu^2\eta$ $z = \mu^3\zeta$	$\varepsilon = \mu^3$	$\xi' = \xi^2 - \eta$ $\eta' = -1$ $\zeta' = -\xi$
2. Точка вырождения контактной структуры	$y = x^2$	$z - x^3 z - x^5 = c$	$x = \mu\xi$ $y = \mu^2\eta$ $z = \mu^4\xi + \mu^5\zeta$	$\varepsilon = \mu^3$	$\xi' = \xi^2 - \eta$ $\eta' = -1$ ; $\zeta' = (a - \delta) \times$ $\times \xi^2 - a\xi\eta$ $\delta = \pm 1$
3. Особая точка	$y = x^2$	$x dx = (2x + az) dz$	$x = \mu\xi$ $y = \mu^2\eta$ $z = \mu\zeta$	$\varepsilon = \mu^2$	$\xi' = \xi^2 - \eta$ $\eta' = 2\xi + a\zeta$ $\zeta' = \pm 1$

плоскостей, порожденного полем реперов  $\partial/\partial x$ ,  $G_1\partial/y + G_2\partial/\partial z|_{y=x^2}$ , совпадает с одной из нормальных форм, соответствующих семействам (4), (5) или уравнению (6).

◀ Можно считать, что при  $\varepsilon=0$  поверхность  $F=0$  и поле направлений на ней уже нормализованы. Семейство поверхностей, получаемое деформацией поверхности  $y=x^2$  в пространстве  $(x, y, z)$ , расслоенным диффеоморфизмом, гладко зависящим от параметра деформации, переводится вблизи нуля в постоянное семейство  $y=x^2$ . Это позволяет нормализовать поверхность  $F=0$  при малых  $\varepsilon$ . Поля направлений, описанные в теореме, получаются малым возмущением одного из стандартных. Требования типичности, налагаемые на поля направлений при доказательстве теоремы п. 2.5, выделяют открытое множество в соответствующем функциональном пространстве. Поэтому все поля, близкие к нормализованным полям, задаваемым формулами (4), (5), (6), приводятся к нормальным формам того же вида; нормальная форма (6) содержит параметр  $a$ , зависящий от нормализуемого поля. Диффеоморфизмы, нормализующие поля, получаемые гладкой деформацией нормализованных полей, можно выбрать гладко зависящими от параметра деформации; это легко вывести из рассуждений п.п. 2.5—2.7. ▶

Следствие. Типичная быстро-медленная система с двумя медленными переменными и одним быстрым вблизи любой точки на складке медленной поверхности гладко зависящим от  $\varepsilon$  расслоенным диффеоморфизмом может быть превращена в одну из следующих систем.

1. Вблизи типичной точки складки (где не вырождается контактная структура и нет особой точки медленной системы)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - y) A, \quad \dot{y} = \varepsilon G_1, \quad \dot{z} = \varepsilon [xG_1 + (x^2 - y) B], \\ A(0) &= -G_1(0) = 1; \end{aligned} \quad (7)$$

здесь и ниже  $A$  и  $B$  — гладкие функции от  $x, y, z, \varepsilon$ .

2. Вблизи точки вырождения контактной структуры

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - y) A, \quad \dot{y} = \varepsilon G_1, \quad \dot{z} = \varepsilon \left[ \frac{\delta x^3 + \frac{3}{2} kxz}{1 - kx^2} G_1 + (x^2 - y) B \right], \\ [A(0) &= -G_1(0) = 1, \quad \delta = \pm 1. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Вблизи особой точки на складке медленной поверхности

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - y) A, \quad \dot{y} = \varepsilon [(2x + a(\varepsilon)z) G_2 + (x^2 - y) B], \\ \dot{z} &= \varepsilon G_2, \quad A(0) = |G_2(0)| = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Более того, сохраняющими параметр и медленные переменные гладкими заменами в уравнениях (7), (8), (9) можно добиться равенства  $A = 1 + C(y, z, \varepsilon)x$ . ▲

◀ Поверхность  $F = 0$  имеет вид  $y = x^2$ . Следовательно вблизи нуля  $F = (x^2 - y) A$ ,  $A$  — гладкая функция от  $x, y, z, \varepsilon$ . Поле направлений на медленной поверхности, описанное в теореме, совпадает с полем нулей формы  $G_1 dz - G_2 dy|_{y=x^2}$ . С другой стороны, можно считать, что это поле направлений имеет одну из нормальных форм (4), (5) или (6). Следовательно, оно совпадает в случаях 1 (соответственно, 2 или 3) с полем нулей формы  $\omega_1$  (соответственно,  $\omega_2$  или  $\omega_3$ ), определенной на поверхности  $y = x^2$  (на которой  $dy = 2xdx$ ):

$$\omega_1 = dz - 3x^2 dx|_{y=x^2} = dz - \frac{3}{2} x dy|_{y=x^2};$$

$$\omega_2 = dz - \frac{5x^4 + 3x^2 z}{1 - x^2} dx|_{y=x^2} = dz - \frac{5x^3 + 3xz}{2 - 2x^2} dy|_{y=x^2};$$

$$\omega_3 = 2(2x + az) dz - 2x dx|_{y=x^2} = 2(2x + az) dz - dy|_{y=x^2}.$$

Следовательно, в случае 1

$$G_2 = \frac{3}{2} x G_1 + (x^2 - y) B;$$

здесь и ниже функция  $B$  (своя в каждом из случаев 1, 2, 3) — гладкая по  $x, y, z, \varepsilon$ . Итак, быстро-медленная система имеет вид

$$\dot{x} = (x^2 - y) A, \quad \dot{y} = \varepsilon G_1, \quad \dot{z} = \varepsilon \left[ \frac{3}{2} x G_1 + (x^2 - y) B \right].$$

Для системы общего положения  $A(0)G_1(0) \neq 0$ . Растяжением осей и заменой времени можно добиться того, что  $|A(0)| = |G_1(0)| = 1$ . Меняя, если нужно, ориентацию оси  $x$ , добиваемся равенства  $A(0) = 1$ . Поскольку  $0$  — точка срыва, фазовые кривые по устойчивой части медленной поверхности ( $x < 0$ ) выходят на линию складки. Поэтому  $G_1(0) < 0$  и, значит,  $G_1(0) = -1$ . Растяжением оси  $z$  добиваемся, чтобы коэффициент  $3/2$  в последнем уравнении заменился на 1. Это доказывает следствие в случае 1.

В случае 2 аналогичные рассуждения дают

$$G_2 = \frac{5x^2 + 3xz}{2 - 2x^2} G_1 + (x^2 - y) B.$$

Растяжением осей координат, времени и параметра (коэффициенты растяжения осей времени и параметра положительны) можно добиться того, что  $A(0) = B(0) = -G_1(0) = 1$  и коэффициент при  $\epsilon x^3$  в уравнении для  $z$  будет по модулю равен 1. Это доказывает следствие в случае 2.

Наконец, в случае 3

$$G_1 = 2(2x + a(\epsilon)z) G_2 + (x^2 - y) B.$$

Дальнейшее доказательство, как в случае 2.

Последнее утверждение следствия вытекает из предыдущих и теоремы п. 5.7, гл. 2. ►

**3.4. Вывод систем первого приближения.** Здесь доказано предложение 2. Расслоенный диффеоморфизм в предложении 2 — это диффеоморфизм, приводящий систему к одной из нормальных форм (7), (8), (9). Указанные в таблице замены переводят эти системы в следующие

$$\xi' = \xi^2 - \eta + O(\mu), \quad \eta' = -1 + O(\mu), \quad \zeta' = -\xi + O(\mu); \quad (7')$$

$$\xi' = \xi^2 - \eta + O(\mu), \quad \eta' = -1 + O(\mu), \quad \zeta' = (a - \delta)\xi^3 - a\xi\eta + O(\mu), \quad (8')$$

где  $a = \frac{\partial B}{\partial x}(0)$ ;

$$\xi' = \xi^2 - \eta + O(\mu), \quad \eta' = (2\xi + a(\epsilon)\zeta) + O(\mu), \quad \zeta' = \pm 1 + O(\mu). \quad (9')$$

Переходя к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , получаем системы первого приближения из предложения 2.

**3.5. Исследование систем первого приближения.** Фазовая кривая  $\gamma$  системы первого приближения называется *приближающей*, если она обладает следующим свойством. Пусть  $\{f_\mu^{-1}\}$  — семейство сжатий, обратных растяжениям, с помощью которых из быстро медленной системы получилась система первого приближения. Тогда существует такая окрестность нуля, пересечение которой с кривой  $f_\mu^{-1}\gamma$  при  $\mu \rightarrow 0$  стремится к дуге регулярной фазовой кривой соответствующей вырожденной системы.

Решение, соответствующее приближающей фазовой кривой, называется *приближающим*.

Предложение 3. Система

$$\xi' = \xi^2 - \eta, \quad \eta' = -1$$

имеет единственную приближающую фазовую кривую.

◀ В [94] и [86, §§ 9, 10] доказано, что эта система имеет решение  $(\xi(\tau), \eta(\tau))$  вида:

$$\eta(\tau) = -\tau, \quad \xi(\tau) = -\sqrt{-\tau} + O(1) \text{ при } \tau \leq 0,$$

$$\xi(\tau) \rightarrow \infty \text{ при } \tau \rightarrow \tau_0,$$

где  $\tau_0$  — некоторая положительная константа. Соответствующую фазовую кривую обозначим  $\gamma$ ; ее положительную полу-траекторию обозначим  $\gamma^+$ , отрицательную —  $\gamma^-$ . Кривая  $\gamma$  называется разделяющей, поскольку все решения с начальным условием выше  $\gamma$  стремятся к бесконечности при  $\tau \rightarrow -\infty$ , а все решения с начальным условием ниже  $\gamma$  уходят на бесконечность при убывании  $\tau$  за конечное время (рис. 71).

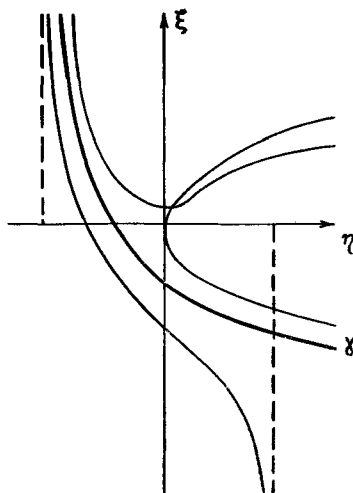


Рис. 71. Фазовые кривые системы первого приближения в случае одной быстрой и одной медленной переменной. Приближающая фазовая кривая выделена

Полутраектория  $\gamma^+$  расположена в вертикальной полуполосе, принадлежащей верхней полуплоскости. При диффеоморфизмах  $f_\mu^{-1}$  эта полуполоса сужается, и в пределе превращается в положительную полуось  $\xi$  — фазовую кривую быстрой системы.

Полутраектория  $\gamma^-$  при диффеоморфизме  $f_\mu^{-1}$  превращается в кривую

$$\{(-\sqrt{y} \div O(\mu), y|y \geq 0\}$$

и при  $\mu \rightarrow 0$  приближается к устойчивой части медленной кривой. ►

Предложение 4. Система

$$\dot{\xi} = \xi^2 - \eta, \quad \dot{\eta} = -1, \quad \dot{\zeta} = -\xi$$

имеет приближающую фазовую кривую, определенную однозначно с точностью до сдвига вдоль оси  $\zeta$ .

◀ Соответствующее решение имеет вид:  $(\xi(\tau), \eta(\tau), \zeta(\tau))$ , где  $(\xi(\tau), \eta(\tau))$  — приближающее решение из предложения 3, а  $\zeta(\tau) = -\frac{2}{3}(-\tau)^{3/2} + O(\tau)$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ . Это равенство следует из формулы для  $\xi(\tau)$  и уравнения  $\zeta' = -\xi$ . Входящая в 0 по устойчивой части медленной поверхности фазовая кривая медленного уравнения, соответствующего системе (7), имеет вид  $\left\{ \left( x, x^2, \frac{2}{3} x^3 \right) \mid x \leq 0 \right\}$ . Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему. ►

Замечания. 1. Система первого приближения в случае 2 не имеет приближающей фазовой кривой, однако имеет семейство отрицательных полутраекторий, получаемых друг из друга сдвигом вдоль оси  $\zeta$ , которые под действием сжатия  $f_\mu^{-1}$  стремятся при  $\mu \rightarrow 0$  к кривой  $\left\{ x, x^2, \frac{2}{5} \delta x^5 \mid x \leq 0 \right\}$ . Эта кривая имеет высокий порядок касания с фазовой кривой медленного уравнения, соответствующего системе (8):  $\left\{ \left( x, x^2, \frac{2}{5} \delta x^5 (1 - kx^3)^{-1} \mid x \leq 0 \right) \right\}$ , заканчивающейся в точке 0: их 7-струи совпадают.

2. Фазовые кривые быстро-медленной системы вблизи особой точки на складке медленной поверхности при стремлении  $\epsilon$  к нулю могут стремиться к вырожденным уткам (см. § 5).

### 3.6. Воронки.

Определение ([204]). Точка  $p$  на границе устойчивой части медленной поверхности называется *воронкой*, если в любой ее окрестности существует область, через точки которой проходят фазовые кривые вырожденной системы, срывающиеся с поверхности медленных движений в точке  $p$ .

Пример. Особая точка уравнений медленных движений типа сложенный узел (рис. 68б) является воронкой. Результаты пункта 2.5 показывают, что такие воронки неустранимы малым шевелением быстро-медленной системы.

Теорема ([204]). Типичные системы со связями в случае трех и более медленных переменных воронок не имеют.

### 3.7. Периодические релаксационные колебания на плоскости.

Теорема ([71]). Пусть правые части двумерной системы общего положения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, y, \varepsilon), & \dot{y} &= \varepsilon G(x, y, \varepsilon), \\ x &\in \mathbb{R}, & y &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2 \text{ bis})$$

непрерывно дифференцируемы; функция  $F$  дважды, а функция  $G$  — один раз. Предположим, что соответствующая вырожденная система

$$f(x, y) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (3 \text{ bis})$$

имеет замкнутую фазовую кривую  $L_0$ . Тогда существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при каждом значении параметра  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  найдется малая вместе с  $\varepsilon$  окрестность траектории  $L_0$ , в которой лежит единственный и устойчивый предельный цикл  $L_\varepsilon$  системы (2bis), причем  $L_\varepsilon$  стремится к  $L_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Например, уравнение Ван дер Поля имеет один единственный устойчивый предельный цикл, близкий к изображенному пунктиром на рис. 64.

Для предельного цикла  $L_\varepsilon$  из предыдущей теоремы найдены асимптотические приближения с точностью до величин наперед заданного степенного порядка малости по  $\varepsilon$ .

**Теорема ([86]).** Пусть правые части двумерной системы (2bis) общего положения бесконечно дифференцируемы. Предположим, что соответствующая вырожденная система имеет замкнутую траекторию  $L_0$ , причем в каждой ее точке срыва  $p$  выполнено условие  $f_{xx}''(p) \neq 0$ . Тогда для периода  $T_\varepsilon$  релаксационного колебания, отвечающего предельному циклу  $L_\varepsilon$ , справедливо асимптотическое разложение при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$T_\varepsilon = T_{00} + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(k-2)} T_{k\nu} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon},$$

где  $\pi$  — целочисленная функция целочисленного аргумента:

$$\pi(k) = \left[ \frac{k}{3} \right] + \begin{cases} 0, & \text{если } k \not\equiv 1 \pmod{3}, \\ 1, & \text{если } k \equiv 1 \pmod{3}, \end{cases}$$

а  $T_{k,\nu}$  — числовые коэффициенты, эффективно вычисляемые (без интегрирования системы (2bis) или (3bis)) как значения вполне определенных функционалов от функций  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и кривой  $L_0$ . Асимптотические разложения амплитуды  $X_\varepsilon$   $x$ -компоненты и амплитуды  $Y_\varepsilon$   $y$ -компоненты релаксационного колебания имеют такую же структуру, как и асимптотическое разложение для периода  $T_\varepsilon$ .

Первые четыре члена разложений для  $T_\varepsilon$  дают асимптотические при  $\lambda \rightarrow \infty$  формулы Дородницына [69], [70] для периода  $T_\lambda$  и амплитуды  $X_\lambda$  периодического решения уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0:$$

$$T_\lambda = 1,613706\lambda + 7,01432\lambda^{-1/3} - \frac{2}{3} \frac{\ln \lambda}{\lambda} - 1,3233\lambda^{-1} + O(\lambda^{-5/3}),$$

$$X_\lambda = 2^{-1} 0,77937\lambda^{-4/3} - \frac{16}{27} \frac{\ln \lambda}{\lambda^2} - 0,8762\lambda^{-2} - O(\lambda^{-8/3}).$$

В случае системы (2) порядка  $n > 2$  асимптотические при  $\epsilon \rightarrow 0$  представления для замкнутой траектории  $L_\epsilon$  релаксационного колебания и его периода  $T_\epsilon$  вычислены с точностью до членов порядка  $O(\epsilon)$  [94], [86]; при этом предполагается, что точки срыва — общего положения (см. п. 3.2).

#### § 4. Затягивание потери устойчивости при переходе пары собственных значений через мнимую ось

В этом параграфе рассматриваются системы с медленно меняющимися параметрами, в которых, при изменении параметра, положение равновесия мгновенной системы теряет устойчивость с прохождением пары собственных значений через мнимую ось.

Явление затягивания состоит в том, что фактический уход фазовой точки от потерявшего устойчивость положения равновесия происходит не сразу после потери устойчивости, а спустя некоторое время, за которое (в аналитической системе) параметр успевает измениться на конечную величину.

Аналитичность здесь существенна, так как в типичных системах конечной (и даже бесконечной) гладкости срыв происходит через время, за которое параметр не успевает заметно измениться.

Более общим образом мы рассматриваем быстро-медленные системы, для которых особая точка уравнения быстрых движений при изменении медленных переменных теряет устойчивость с переходом пары собственных значений через мнимую ось. Для аналитических систем общего положения положительные полутраектории из некоторой области фазового пространства стремятся при  $\epsilon \rightarrow 0$  к фазовым кривым вырожденной системы, имеющим сравнимые по длине участки, один из которых расположен на устойчивой, а другой — на неустойчивой части медленной поверхности. Этим описываемые движения сходны с «утками», рассмотренными ниже, в § 5.

**4.1. Типичные системы.** Рассмотрим класс быстро-медленных систем (2), медленная поверхность которых состоит из регулярных точек (диффеоморфно проектируется на пространство медленных переменных вдоль пространства быстрых). Потребуем также, чтобы множество негиперболических положений равновесия системы быстрых движений состояло из точек с двумерным центральным многообразием и парой ненулевых собственных значений на мнимой оси. Такие системы назовем системами типа 2. Эти системы образуют открытое множество в подходящем функциональном пространстве.



Медленная поверхность системы типа 2 делится на две области — устойчивую и неустойчивую. Первая состоит из устойчивых положений равновесия быстрой системы, вторая — из неустойчивых; их общая граница называется границей устойчивости. На устойчивой части медленной поверхности для типичной системы типа 2 открытое множество образуют точки, из которых выходят фазовые кривые медленной системы, трансверсально пересекающие границу устойчивости и такие, что при движении параметра  $y$  вдоль медленной кривой пара собственных значений особой точки уравнения быстрых движений переходит через мнимую ось трансверсально и с ненулевой скоростью. Такие точки назовем правильными; ниже рассматриваются только правильные точки на устойчивой части медленной поверхности.

**4.2. Затягивание потери устойчивости.** Фазовая точка исходной системы типа 2, начавшая движение не слишком далеко от правильной точки, лежащей на устойчивой части медленной поверхности, быстро, за время порядка  $|\ln \epsilon|$  втягивается в  $O(\epsilon)$  — окрестность (окрестность размера порядка  $\epsilon$ ) медленной поверхности (рис. 72). Затем движение происходит вблизи медленной траектории по меньшей мере до тех пор, пока эта траектория не выйдет на границу устойчивости. Если быстро-медленная система (2) аналитична, то при дальнейшем движении обязательно осуществляется интересное и несколько неприятное явление — затягивание потери устойчивости быстрых движений. Оно состоит в том, что фазовая точка движется вдоль неустойчивой части медленной поверхности в  $O(\epsilon)$  — окрестности медленной траектории еще время порядка  $\epsilon^{-1}$  после пересечения медленной траекторией границы устойчивости. При этом медленная траектория уходит за границу устойчивости на расстояние порядка единицы. Лишь затем может произойти срыв, то есть быстрый, за время порядка  $|\ln \epsilon|$  (медленные переменные меняются на малую величину порядка  $\epsilon |\ln \epsilon|$ ), уход от медленной поверхности на расстоянии порядка 1 (рис. 72). Это явление было обнаружено и исследовано на примере в [116], общий случай рассмотрен в [90].

Если система имеет конечную гладкость (или даже бесконечную, но не аналитична), то столь длительного затягивания потери устойчивости, вообще говоря, не будет. В классе  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , есть открытое множество систем, у которых точки уходят от медленной поверхности на расстояние порядка 1, перейдя за границу устойчивости на малое расстояние порядка  $\sqrt{\epsilon |\ln \epsilon|}$ . Если  $k = \infty$ , то уход за границу устойчивости остается меньшим, чем  $M(\epsilon) \sqrt{\epsilon |\ln \epsilon|}$ , где  $M(\epsilon) \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , но  $M(\epsilon)$  может возрастать сколь угодно медленно. В этих системах срыв с медленной поверхности происходит вблизи границы устойчивости на расстоянии порядка  $\epsilon^{<1/2}$ . С другой стороны, в системе

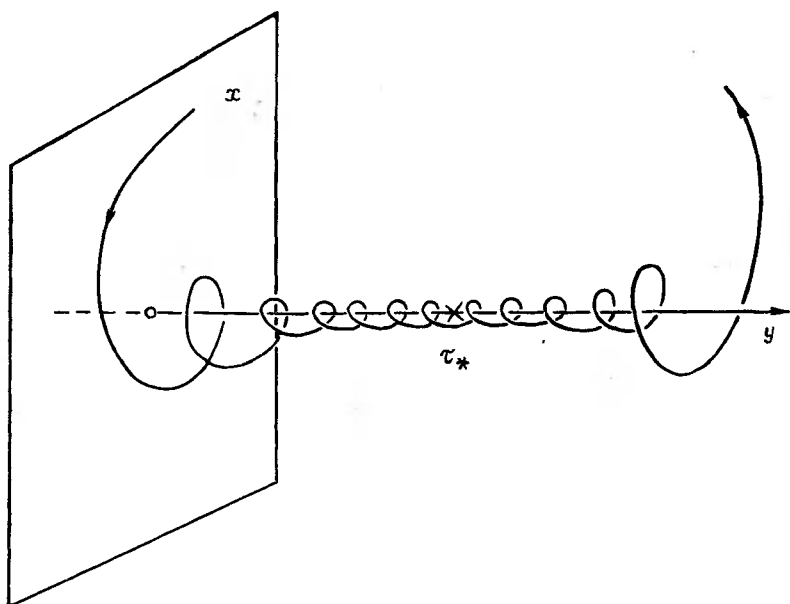


Рис. 72. Затягивание потери устойчивости в системе типа 2 для двух быстрых и одной медленной переменной. Медленная кривая совпадает с осью  $y$ ; крестиком помечена граница устойчивости

класса  $C^k$ , можно гарантировать, что точка останется в  $O(\epsilon)$  — окрестности медленной поверхности, перейдя не менее чем на расстояние порядка  $\sqrt{\epsilon |\ln \epsilon|}$  за границу устойчивости. Для  $k = \infty$  эта оценка заменяется на  $M(\epsilon) \sqrt{\epsilon |\ln \epsilon|}$ .

**4.3. Жесткость потери устойчивости в аналитических системах типа 2.** Потеря устойчивости в аналитических быстро-медленных системах типа 2, описанная в п. 4.2, проходит всегда жестко, независимо от того, будет ли мягкой или жесткой потеря устойчивости в семействе быстрых уравнений при изменении параметра семейства (медленной переменной) вдоль фазовой кривой медленного движения. Рассмотрим следующий пример, соответствующий открытому множеству быстро-медленных систем типа 2. Без ограничения общности можно считать, что медленная поверхность имеет вид  $x=0$ , поскольку она диффеоморфно проектируется на пространство медленных переменных вдоль пространства быстрых; проектирование  $(x, y) \mapsto y$  обозначим через  $\pi$ . Пусть  $y(\tau)$  — решение медленной системы, фазовая кривая которого в момент  $\tau=0$  переходит из устойчивой части медленной поверхности в неустойчивую. Пусть в соответствующем быстром семействе  $\dot{x} = f(x, y(\tau))$  с

параметром  $\tau$  происходит мягкая потеря устойчивости с рождением при  $\tau=0$  устойчивого предельного цикла. Предельное поведение траектории быстрого движения в слое  $y=y(\tau)$  с близким к нулю начальным условием меняется непрерывно с изменением  $\tau$ : при  $\tau \leq 0$  фазовые кривые стремятся к положению равновесия  $y(\tau)$ , а при  $\tau > 0$  наматываются на предельный цикл, непрерывно зависящий от  $\tau$ . Иначе ведут себя траектории аналитической быстро-медленной системы с начальным условием, близким к  $y(\tau)$ . Фазовая точка такой траектории при малом  $\epsilon$  срывается с медленной поверхности не при  $\tau=0$ , а позже, когда цикл уже имеет размер порядка 1. Поэтому автоколебательный режим возникает сразу с амплитудой порядка единица, то есть срыв с равновесия происходит жестко.

**4.4. Гистерезис.** Следующий пример иллюстрирует явление гистерезиса в быстро-медленных системах типа 2. Рассмотрим «треугольную» систему

$$\dot{x} = F(x, y, \epsilon), \quad \dot{y} = \epsilon G(y, \epsilon).$$

Эта система факторизуется: ее фазовые кривые лежат над фазовыми кривыми медленной системы при любом  $\epsilon > 0$ . Наряду с предыдущей быстро-медленной системой, рассмотрим систему

$$\dot{x} = F(x, y, \epsilon), \quad \dot{y} = -\epsilon G(y, \epsilon).$$

Будем считать, что в обеих системах медленная переменная одна. Пусть  $y(\tau)$  — решение первого медленного уравнения, переходящее при  $\tau=0$  из устойчивой части медленной кривой в неустойчивую. Существуют такие положительные  $\tau_0$  и  $\tau^*$ , что решение первой системы с начальным условием  $(x_0, y(-\tau_0))$ , близким к  $y(-\tau_0)$ , при малом  $\epsilon$  сорвется на предельный цикл вблизи точки  $y(\tau^*)$ . Этот цикл уже имеет радиус порядка 1. Решение второй системы с начальным условием, близким к этому циклу, будет дрейфовать вдоль циклов быстрых систем, соответствующих параметру  $y(-\tau)$  и выйдет на медленную поверхность вблизи точки  $y(0)$ . Тем самым, эволюция фазовой точки второй системы не сводится к эволюции фазовой точки первой с помощью обращения времени, в отличие от эволюции аттракторов соответствующих быстрых систем (наблюдается гистерезис).

**4.5. Механизм затягивания.** Покажем, как происходит затягивание потери устойчивости. Рассмотрим быстро-медленную систему типа 2 с медленной поверхностью  $x=0$ . Уравнение для быстрых переменных имеет вид

$$\dot{x} = A(y, \epsilon)x + \epsilon h(y, \epsilon) + O(|x|^2). \quad (10)$$

Сделаем замену переменных вида

$$\tilde{x} = x - \frac{1}{\varepsilon} A^{-1}h.$$

Уравнение для  $\tilde{x}$  имеет тот же вид (10), но функция  $h$  имеет порядок  $\varepsilon$ . Следующая такая замена делает  $h = O(\varepsilon^2)$  и т. д. Процедура последовательных замен, вообще говоря, расходуется. Оценки показывают, что сделав порядка  $1/\varepsilon$  таких замен, аналитическую систему можно привести к виду (10), где член  $h$  экспоненциально мал:  $h = O(\exp(-c/\varepsilon))$ ,  $c = \text{const} > 0$ , причем суперпозиция замен отличается от тождественной на  $O(\varepsilon)$  (аналогичные оценки см. в [89]).

Рассмотрим движение фазовой точки системы (10) с экспоненциально малым  $h$  из начального условия  $(x_0, y_0)$ . Предположим, что медленная кривая с началом  $y_0$  выходит на границу устойчивости за медленное время порядка 1. Тогда если  $x_0$  достаточно мало, то фазовая кривая с началом  $(x_0, y_0)$  выходит на границу устойчивости (точнее, проходит над ней), за быстрое время, порядка  $1/\varepsilon$ . При этом  $|x(t)|$  сначала быстро убывает, становится экспоненциально малым и остается таким до прохода над границей устойчивости. После этого  $|x(t)|$  может начать быстро возрастать, но чтобы от экспоненциально малого значения дорасти до величины порядка  $\varepsilon$ , требуется быстрое время по меньшей мере порядка  $1/\varepsilon$ . Следовательно, потеря устойчивости затягивается. Если в какой-то момент времени стало  $|x(t)| \sim \varepsilon$ , то уже через быстрое время порядка  $|\ln \varepsilon|$  будет  $|x(t)| \sim 1$ , т. е. происходит срыв.

Если система имеет конечную гладкость, то процедура последовательных замен переменных обрывается после конечного числа шагов, так что удается сделать лишь  $h = O(\varepsilon^l)$ . Тогда при проходе над границей устойчивости будет  $x = O(\varepsilon^{l+1})$ . Чтобы дорасти от  $\varepsilon^{l+1}$  до  $\varepsilon$  (или от  $\varepsilon$  до 1), после момента потери устойчивости нужно быстрое время порядка  $\sqrt[l+1]{|\ln \varepsilon|/\varepsilon}$ .

#### 4.6. Вычисление момента срыва в аналитических системах.

Рассмотрим быстро-медленную систему типа 2 и фиксируем ее медленную траекторию. Будем рассматривать только такие решения быстро-медленной системы, начальные условия которых лежат над  $O(\varepsilon)$  — окрестностью фиксированной траектории. Момент медленного времени  $\tau$  назовем асимптотическим моментом срыва решения, если в его  $O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$  — окрестности лежит интервал, на левом конце которого расстояние фазовой точки  $(x(\tau), y(\tau))$  от медленной поверхности — порядка  $\varepsilon$ , а на правом — порядка 1. Момент медленного времени назовем асимптотическим моментом падения, если при обращении времени он становится асимптотическим моментом срыва.

В аналитической системе можно выразить асимптотический момент срыва через асимптотический момент падения, или, по меньшей мере, оценить его снизу [116], [90]. Для этого требуются построения, связанные с анализом решений при комплекс-

ных значениях времени. В целях упрощения изложения проведем их в предположении, что быстрая система двумерна. Формулировки для общего случая приведены в [90].

Пусть  $\tau \rightarrow y(\tau)$ ,  $\tau = \varepsilon t$  — фиксированное решение медленной системы,  $y(\tau_0) = y_0$ . Пусть при некотором  $\tau = \tau_*$  его фазовая кривая пересекает границу устойчивости, и при этом пара сопряженных собственных чисел  $\lambda_1(y)$ ,  $\lambda_2(y)$  пересекает мнимую ось трансверсально и с ненулевой скоростью. Введем комплексную фазу  $\Psi(\tau) = \int_{\tau_*}^{\tau} \lambda_1(y(\tau)) d\tau$ . Ограничение функции  $\operatorname{Re} \Psi(\tau)$  на

вещественную ось в точке  $\tau_*$  очевидно имеет невырожденный минимум. Поэтому на достаточно малом отрезке вещественной оси времени, примыкающем к  $\tau_*$  слева, определена функция  $\Pi$ , сопоставляющая моменту  $\tau < \tau_*$  момент  $\Pi(\tau) > \tau_*$  такой, что  $\operatorname{Re} \Psi(\tau) = \operatorname{Re} \Psi(\Pi(\tau))$ . На плоскости комплексного медленного времени точки  $\tau$  и  $\Pi(\tau)$  соединены дугой  $L$  линии уровня  $\operatorname{Re} \Psi(\tau) = \operatorname{const}$  (рис. 73). Если  $\tau < \tau_*$  достаточно близко к  $\tau_*$ , то в области  $K$ , ограниченной дугой  $L$  и симметричной ей относительно вещественной оси дугой  $\bar{L}$ , выполнены следующие условия: 1) медленная траектория аналитична,  $f$  и  $g$  аналитичны в точках медленной траектории, 2)  $\lambda_{1,2} \neq 0$ , 3)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 4) касательные к линиям  $\operatorname{Re} \Psi(\tau) = \operatorname{const}$  не вертикальны. Определим  $\tau$  — нижнюю грань значений  $\tau < \tau_*$ , для которых в области  $K$  выполнены условия 1) — 4). Обозначим  $\tau^+ = \Pi(\tau^-)$ .

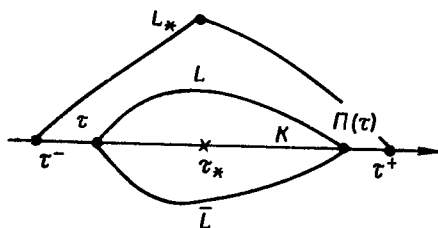


Рис. 73. Построение момента срыва по моменту падения («функция входа — выхода»)

**Теорема ([90]).** Рассмотрим быстро-медленную систему типа 2 с фиксированным медленным решением. Пусть  $\tau^-$  и  $\tau^+$  те же, что и выше,  $\tau_0 \in (\tau^-, \tau^+)$  — асимптотический момент падения решения быстро-медленной системы. Тогда  $\Pi(\tau_0)$  — асимптотический момент срыва этого решения. На интервале медленного времени  $(\tau_0 + c\varepsilon |\ln \varepsilon|, \Pi(\tau_0) - c\varepsilon |\ln \varepsilon|)$  быстро-медленное решение лежит в  $O(\varepsilon)$  — окрестности фиксированного медленного решения.

Если момент падения лежит левее  $\tau^-$ , то можно показать, что фазовая точка остается вблизи медленного решения, по

меньшей мере, пока  $\tau < \tau^+ - \delta(\epsilon)$ ,  $\delta(\epsilon) \rightarrow 0^+$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Для вычисления в этом случае асимптотического момента срыва следует рассмотреть поведение медленного решения и собственных чисел на кривой  $L$ . — дуге линии уровня  $\operatorname{Re}\Psi(\tau) = \text{const}$ , с концами  $\tau^-$  и  $\tau^+$ .

В ряде примеров  $\tau^+$  оказывается асимптотическим моментом срыва для всех движений с лежащим левее  $\tau^-$  асимптотическим моментом падения.

Пример 1. Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (y - i)z + \epsilon a(y), & z &= x_1 - i x_2, \\ \dot{y} &= \epsilon. \end{aligned}$$

Пусть функция  $a(y)$  аналитична при  $|\operatorname{Im}y| < 2$ . Медленное решение  $z=0$ ,  $y = \epsilon t = \tau$  пересекает границу устойчивости при  $\tau=0$ . Собственное значение  $\lambda_1 = \tau - i$  обращается в нуль при  $\tau=i$ , дуга  $L$  состоит из двух отрезков, соединяющих точки  $\tau^- = -1$  и  $\tau^+ = 1$  с точкой  $\tau^c = i$  ( $\tau^c$  — от critical). Пусть асимптотический момент падения  $\tau_0$  для быстро-медленного решения  $z(t)$  лежит левее  $-1$ . Тогда  $z(-1/\epsilon) = O(\epsilon)$ . Чтобы вычислить  $z(1/\epsilon)$ , удобно перейти на плоскости  $\tau$  из точки  $-1$  в точку  $1$  по дуге  $L$ . Для  $z$  получается линейное уравнение с чисто мнимым собственным числом, обращающимся в нуль при  $\tau=i$ . Вдали от точки  $i$  величина  $|z|$  испытывает лишь колебания порядка  $\epsilon$ . Существенное изменение  $|z|$  набирается в окрестности точки  $i$  и легко подсчитывается методом стационарной фазы. Получается  $z(1/\epsilon) = \sqrt{2\pi\epsilon} |a(i)| + O(\epsilon)$ . Если  $a(i) \neq 0$ , то  $\tau^+ = 1$  — асимптотический момент срыва.

Пример 2. Добавим к предыдущей системе нелинейные члены и положим  $a=1$ :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (y - i)z + \epsilon + \gamma z |z|^2, & \gamma &= \text{const}, \\ \dot{y} &= \epsilon. \end{aligned}$$

Доказано, что нелинейность не оказывает существенного влияния на срыв с медленного решения  $z=0$ ,  $y=\tau$  [116]. Опять  $\tau^+ = 1$  является асимптотическим моментом срыва для движений, у которых асимптотический момент падения лежит левее  $\tau^- = -1$ . В медленной системе потеря устойчивости при  $\gamma < 0$  происходит мягко, а при  $\gamma > 0$  — жестко. В полной системе это различие не проявляется.

Дуга  $L$  характеризуется тем, что на ней нарушается одно из введенных выше условий 1—4. В рассмотренных примерах нарушается условие  $\lambda_1 \neq 0$ . Соответствующие системы нетипичны, поскольку для них медленная поверхность остается регулярной при обращении  $\lambda_1$  в нуль. Для типичной системы в той точке, где  $\lambda_1(y(\tau_0)) = 0$ , медленное решение выходит на складку медленной поверхности, и имеет ветвление типа  $\sqrt{\tau - \tau_0}$ . Правдо-

подобно, что и в этом случае при некоторых условиях общности положения фазовые точки, притянувшиеся к медленной поверхности при  $\tau < \tau^*$ , срываются с нее почти одновременно при  $\tau = \tau^+$ ; это предположение высказано в [90].

**4.7. Затягивание при потере устойчивости циклом.** Аналогичные явления затягивания сопровождают в аналитических системах потерю устойчивости циклом. Пусть быстрая система имеет при каждом  $y$  невырожденный цикл  $L_y$ . Эволюционная система для  $y$  получается усреднением подсистемы для  $y$  в (2) по фазе движения вдоль цикла  $L_y$  [95]. Обозначим  $y = Y(\tau)$ ,  $\tau = \varepsilon t$  — решение эволюционной системы,  $Y(\tau_0) = y_0$ .

Пусть цикл  $L_{y_0}$  устойчив, его мультипликаторы лежат в единичном круге. Фазовая точка быстро-медленной системы, начавшая движение при  $\tau = \tau_0$  достаточно близко от цикла  $L_{y_0}$ , быстро втягивается в  $O(\varepsilon)$  — окрестность эволюционирующего цикла  $L_{Y(\tau)}$  и остается в ней, пока сохраняется устойчивость [95]. Предположим, что при некотором  $\tau = \tau_*$  цикл  $L_{Y(\tau)}$  теряет устойчивость так, что либо пара мультипликаторов пересекает единичную окружность в сопряженных точках, либо один мультипликатор — в точке  $(-1)$ , а остальные мультипликаторы остаются в единичном круге. Оказывается, что потеря устойчивости при  $\tau > \tau_*$  затягивается: при  $\tau - \tau_* \sim 1$  точка все еще будет находиться в  $O(\varepsilon)$  — окрестности цикла  $L_{Y(\tau)}$ , и лишь затем происходит срыв. В неаналитической системе такого длительного затягивания, вообще говоря, не будет.

**4.8. Затягивание потери устойчивости и «утки».** Рассматриваемая проблематика сходна с теорией «уток» (см. § 5). Быстро-медленная траектория типа «утки» также долго движется вдоль неустойчивого куска медленной поверхности после перехода через линию вырождения равновесий. Но «утки» встречаются в системе, зависящей от дополнительного параметра относительно редко: они существуют для экспоненциально малого интервала значений этого параметра.

Для затягивания при потере устойчивости невырожденным равновесием (циклом) параметров подбирать не надо. С другой стороны, «утки» существуют в системах с конечной гладкостью, а затягивание п.п. 4.1—4.6, вообще говоря, только в аналитических.

## § 5. Решения-утки

Фазовые кривые быстро-медленных уравнений могут при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в некоторых специальных случаях стремиться к кривым, состоящим не только из участков быстрого движения и устойчивых дуг медленной кривой, но содержащим также и неустойчивые дуги. Эти предельные кривые называются *утками* из-за своей формы (рис. 75). Коразмерность соответствующего мно-

жества в функциональном пространстве релаксационных систем с одной быстрой и одной медленной переменной равна 1 (оно включает системы с самопересекающейся медленной кривой и с особой точкой медленной системы на складке медленной кривой). Тем самым, утки встречаются неустранимым малым шевелением образом (при отдельных значениях параметра) в типичных однопараметрических семействах релаксационных систем с одной быстрой и одной медленной переменной (кроме параметра медленности  $\varepsilon$ , для возникновения уток нужен еще один параметр).

При большем числе медленных переменных утки встречаются и у типичных систем.

**5.1. Пример: особая точка на складке медленной поверхности.** Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = y - f(x), \quad \dot{y} = \varepsilon(a - x) \quad (11_{\varepsilon, a})$$

с параметрами  $\varepsilon$  и  $a$ , которое при каждом фиксированном  $a$  представляет собой быстро-медленное уравнение типа (2) (§ 1).

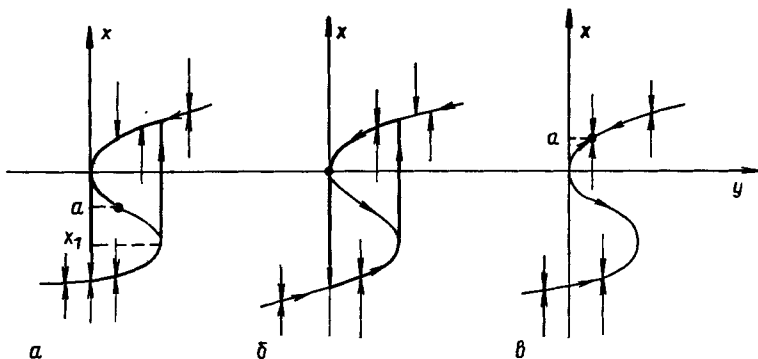


Рис. 74. Фазовые кривые вырожденной системы:

а)  $x_1 < a < 0$  (большой цикл); б)  $a = 0$  (?); в)  $a > 0$  (устойчивая особая точка)

Пусть график функции  $f$  напоминает график кубического многочлена (рис. 74). Тогда фазовые кривые вырожденной системы такие, как на рис. 74а, б, в при  $x_1 < a < 0$ ,  $a = 0$  и  $a > 0$  соответственно. При  $a = 0$  через одну точку может проходить много разных фазовых кривых вырожденной системы: фазовая кривая с началом в особой точке на складке медленной кривой может совпасть с этой точкой, с проходимым бесконечное число раз циклом, выделенным жирной линией на рис. 74б, а может также оказаться в особой точке на складке после конечного числа обходов цикла.

Рассмотрим однопараметрическое подсемейство  $(11_a)$  данного семейства  $(11_{\varepsilon, a})$ , соответствующее множеству  $\varepsilon = \text{const}$ . Тогда если  $a > 0$  велико, по сравнению с  $\varepsilon$ , то все решения соответст-



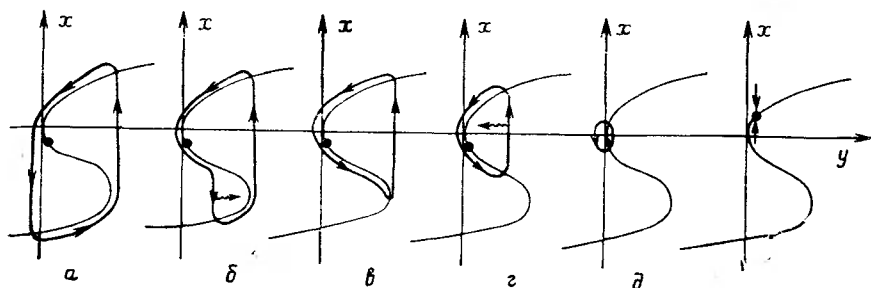


Рис. 75. Эволюция цикла при  $f(x) = x^2 + x^3$ :

а) большой цикл; б) «утка с головой»; в) г) «утки без головы»; д) е) бифуркация исчезновения цикла

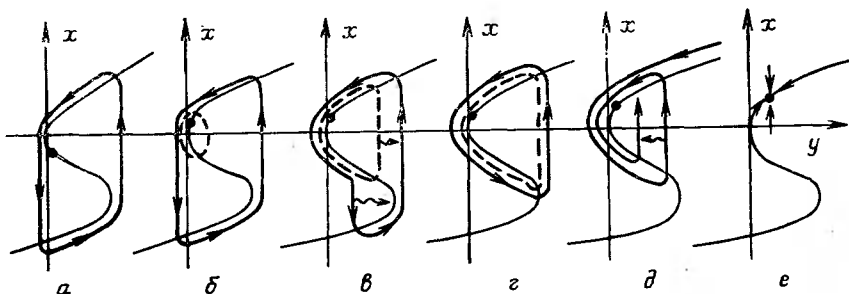


Рис. 76. Эволюция цикла при  $f(x) = x^2 - x^3 + x^5$ :

а) большой цикл; б)–в) бифуркация рождения (малого неустойчивого) цикла; в) асимптотически неустойчивый цикл внутри асимптотически устойчивого; г) слияние устойчивого и неустойчивого циклов и их исчезновение; д) — «лестница» с фиксированными ступенями; е) устойчивая особая точка

вующего уравнения стремятся к устойчивому положению равновесия, а для значений  $a$ , лежащих на интервале между экстремумами и достаточно удаленных от его концов, — к устойчивому циклу, расположенному на расстоянии  $O(\varepsilon^{2/3})$  от цикла, изображенного на рис. 75а. Оказывается, что с изменением  $a$  в семействе уравнений  $(11_{\varepsilon,a})$  при  $\varepsilon = \text{const}$  притягивающее решение уравнения меняется непрерывно и на малом (порядка  $\exp(-1/\varepsilon)$ ) интервале изменения  $a$  оказывается близким к решениям-уткам вырожденной системы. Соответствующие решения уравнения  $(11_{\varepsilon,a})$  также называют решениями-утками. На рис. 75 показана перестройка решений-уток в семействе  $(11_{\varepsilon,a})$  для  $f(x) = x^3 + x^2$ , а на рис. 76 — для  $f(x) = x^5 - x^3 + x^2$ . На рис. 77 заштрихована область пространства параметров на плоскости  $(\varepsilon, a)$ , соответствующая решениям-уткам.

При прохождении  $a$  через 0 в отрицательном направлении особая точка  $(0, 0)$  теряет устойчивость. От знака  $f'''(0)$  зависит, будет ли потеря устойчивости мягкой или жесткой: при

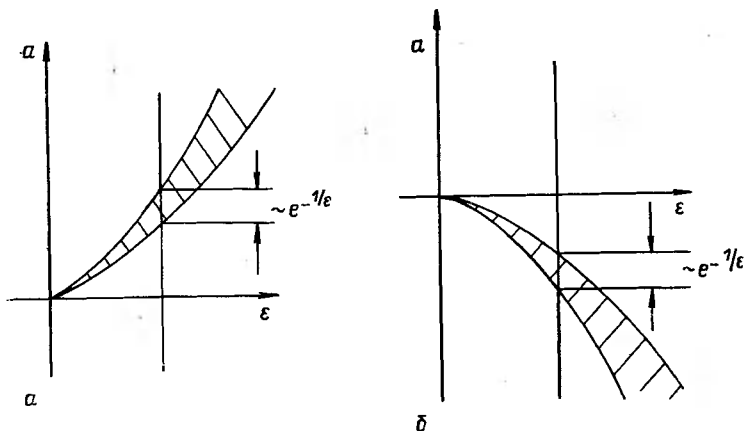


Рис. 77. Область «точных» значений параметров  $(\epsilon, a)$  заштрихована. Ниже этой области — большой цикл, выше — устойчивая особая точка. Линия  $a=0$  — линия бифуркации рождения — исчезновения цикла.  $f'(0)=0$ ,  $f''(0)>0$ ; а)  $f'''(0)<0$ , б)  $f'''(0)>0$

$f'''(0)>0$  потеря устойчивости — мягкая, с рождением малого устойчивого цикла; при  $f'''(0)<0$  — жесткая, с исчезновением малого неустойчивого цикла. Эта бифуркация, происходящая вне области параметров, соответствующих решениям-уткам, показана на рис. 75г, д и рис. 76б, а.

### 5.2. Существование решений-уток.

**Определение.** Назовем *простой вырожденной уткой* ориентированную связную кривую, состоящую из трех дуг: первая и последняя — это интервалы фазовой кривой уравнения быстрых движений, а вторая — это дуга медленной кривой, состоящая из связного устойчивого и связного неустойчивого участков (рис. 78); сначала проходит устойчивый, а затем — неустойчивый участок.

**Теорема 1** (существование уток в окрестности складки). Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, y, a), \quad \dot{y} = \epsilon g(x, y, a). \quad (12_{\epsilon, a})$$

Пусть при любом фиксированном  $a$  медленная кривая соответствующей быстро-медленной системы имеет точку складки, через которую с ненулевой скоростью проходит особая точка системы при прохождении  $a$  через 0. Тогда для каждой простой вырожденной утки, проходящей через точку складки, существует функция  $A: \epsilon \rightarrow A(\epsilon)$ ,  $A(0)=0$ , такая, что уравнение  $(12_{\epsilon, A(\epsilon)})$  имеет решение, фазовая кривая которого стремится к вырожденной утке при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Теорема 2** (существование уток в окрестности самопересечения). Пусть при  $a=0$  медленная кривая системы  $(12_{\epsilon, a})$

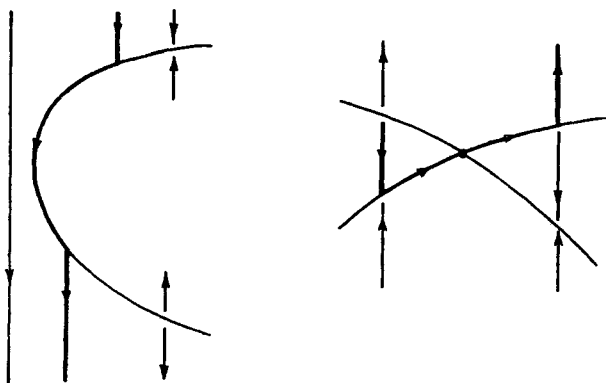


Рис. 78. Простые вырожденные утки

имеет простую точку самопересечения, и в этой точке выполнено условие  $df/da \neq 0$ . Пусть функция  $g$  нигде не обращается в нуль. Тогда для каждой простой вырожденной утки, проходящей через точку самопересечения, справедливо заключение теоремы 1.

**Теорема 3 (жизнь уток коротка).** Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — две функции из теоремы 1 либо 2, соответствующие двум вырожденным уткам. Тогда существует такое  $c > 0$ , что  $|A_1(\epsilon) - A_2(\epsilon)| < e^{-1/c\epsilon}$  для всех достаточно малых  $\epsilon$ .

Все функции  $A(\epsilon)$ , соответствующие уткам, имеют одно и то же асимптотическое разложение по степеням  $\epsilon$ . Существует алгоритм вычисления коэффициентов этого разложения через производные функций  $f$  и  $g$  в критической точке. Аналогичное утверждение справедливо для самих решений-уток: на участке медленного движения они экспоненциально близки. Более того, пусть имеются две простые вырожденные утки, две (возможно совпадающие) функции  $A_1(\epsilon)$  и  $A_2(\epsilon)$  и два семейства решений системы  $(12_{\epsilon, A_i(\epsilon)})$ ,  $i=1, 2$ , фазовые кривые которых сходятся к соответствующим вырожденным уткам. Возьмем отрезки этих фазовых кривых, сходящиеся к дуге медленной кривой, которая образована пересечением медленных дуг двух вырожденных уток, с последующим удалением фиксированных окрестностей концов этого пересечения. Тогда найдется такое  $c > 0$ , что один из отрезков фазовой кривой лежит в  $e^{-1/c\epsilon}$  — окрестности другого для всех достаточно малых  $\epsilon$ . Все медленные участки всех решений-уток имеют одно и то же асимптотическое разложение по степеням  $\epsilon$ . Существует алгоритм вычисления коэффициентов этого разложения через функции  $f$  и  $g$  и их производные.

**5.3. Эволюция простых вырожденных уток.** Фиксируем начальную точку  $(x_0, y_0)$ , не лежащую на медленной кривой, такую, что выходящий из нее отрезок быстрого движения при-

водит на устойчивую ветвь медленной кривой. Пусть  $\varepsilon$  фиксировано, а параметр  $a$  меняется, проходя через интервал «точных» значений. В пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  мы получим эволюцию простых вырожденных уток, показанную на рис. 79, 80.

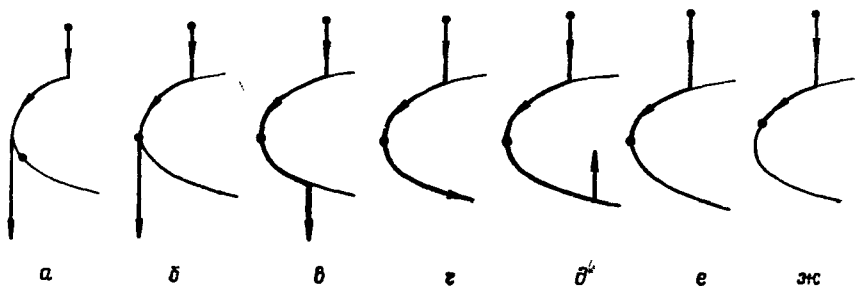


Рис. 79. Эволюция простых вырожденных уток в точке складки (утки присутствуют на рисунках *в, г, д*)



Рис. 80. Эволюция простых вырожденных уток близ точек самопересечения (утки присутствуют на рисунках *в, г, д*)

Предел всей положительной полутраектории может состоять из конечного или бесконечного числа склеивающихся между собой простых вырожденных уток (последнее справедливо, в частности, для уток-циклов); вопрос в том, как склеиваются между собой простые утки, решается с помощью так называемой «функции входа-выхода» (см. [73], [128], [73 : 2]).

**5.4. Полулокальное явление: утки с релаксацией.** Пусть при  $a=0$  медленная кривая имеет две точки складки  $P$  и  $Q$  с одинаковой координатой  $y_0$ , причем отрезок  $PQ$  не содержит других точек медленной кривой; пусть быстрое движение направлено от  $P$  к  $Q$ . Изменим определение простой вырожденной утки, «вставив» между устойчивым и неустойчивым участками медленной кривой дополнительный отрезок фазовой кривой уравнения быстрых движений. Предположим, что при прохождении  $a$  через 0  $y$ -координаты точек  $P$  и  $Q$  проходят друг

через друга с ненулевой скоростью. Пусть в окрестности точек  $P$  и  $Q$  функция  $g$  не обращается в нуль, причем знаки этой функции таковы, что медленное движение в окрестности  $P$  направлено к точке  $P$ , а в окрестности  $Q$  — от точки  $Q$ . В этих предположениях для уток с релаксацией (т. е. для нового определения простой вырожденной утки) справедливы аналоги теорем 1 и, по-видимому, 3. Эволюция уток с релаксацией показана на рис. 81, 82.

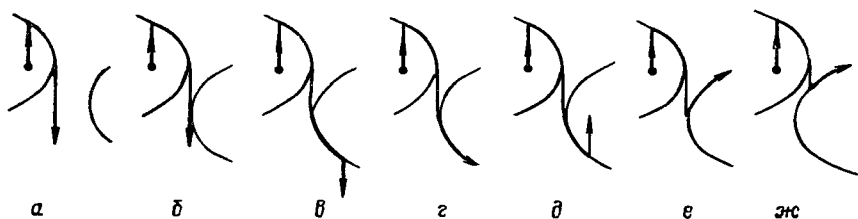


Рис. 81. Эволюция простых вырожденных уток с релаксацией (утки присутствуют на рисунках в), г), д)

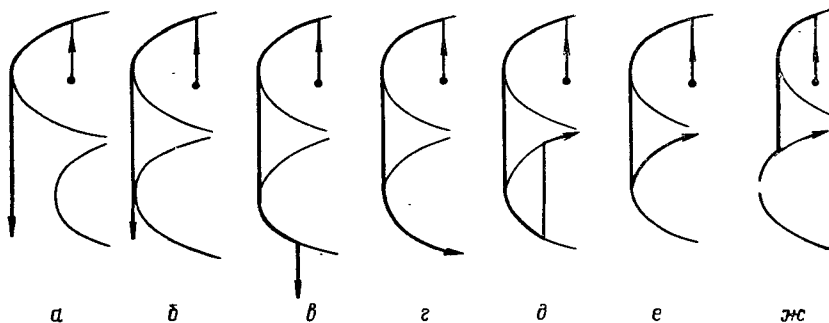


Рис. 82. Эволюция простых вырожденных уток с релаксацией — второй вариант (утки присутствуют на рисунках в), г), д)

**5.5. Утки в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^n$ .** В размерности 3 и выше у быстро-медленных уравнений с одной быстрой переменной утки существуют уже для уравнений общего положения (а не только для однопараметрических семейств уравнений, как в двумерном случае). Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = \varepsilon g(x, y), \quad (13_e)$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $n \geq 3$ .

Назовем *простой вырожденной уткой* ориентированную связную кривую, состоящую из трех дуг: первая и последняя

суть интервалы фазовой кривой уравнения быстрых движений, а вторая есть кривая  $\gamma$ , являющаяся объединением  $\gamma_1 \cup \{p\} \cup \gamma_2$ , где  $p$  — критическая точка, а  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — интервалы фазовых кривых медленного уравнения, расположенные соответственно на устойчивой и неустойчивой ветвях медленной поверхности (вначале проходит  $\gamma_1$ , затем  $\gamma_2$ ). Если кривая  $\gamma$  — гладкая (в точке  $p$ ), то будем и утку называть гладкой.

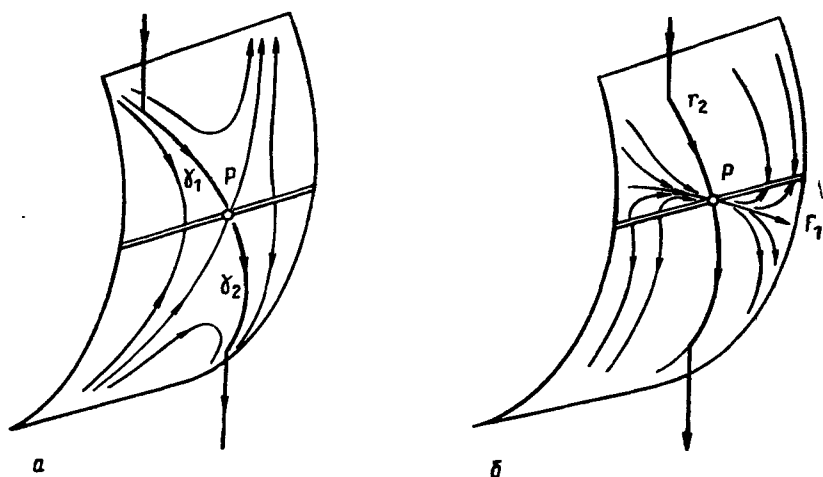


Рис. 83. Утки в  $\mathbb{R}^3$ , проходящие через сложное седло (а) и сложный узел (б)

Медленное уравнение общего положения на двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  может иметь особенности трех типов: сложные узлы, седла и фокусы (см. § 2). Вырожденные утки существуют только для сложных седел и для некоторых сложных узлов (рис. 83). В случае сложного седла (при дополнительных условиях невырожденности, которые мы здесь явно не формулируем) справедлив аналог теоремы 1 [126]: для любой простой вырожденной утки, проходящей через сложное седло, уравнение (13<sub>ε</sub>) имеет решение, фазовая кривая которого стремится к вырожденной утке при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В случае сложного узла этот принцип впервые нарушается: не любая вырожденная утка служит пределом решений уравнения (13<sub>ε</sub>).

Пр и м е р. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -(x^2 + y_1), \quad \dot{y}_1 = \varepsilon(ay_2 + bx), \quad \dot{y}_2 = \varepsilon. \quad (14_\varepsilon)$$

При  $b^2/a > 8$  медленное уравнение имеет в начале координат сложный узел: при  $b > 0$  через этот узел проходят вырожден-

ные утки. Оказывается [127], что если отношение собственных чисел линеаризации медленного уравнения не является целым, то гладкая вырожденная утка служит пределом фазовых траекторий уравнения (14<sub>ε</sub>) в том и только в том случае, если ее дуга, лежащая на медленной поверхности, является дугой либо кривой  $\Gamma_1$ , либо кривой  $\Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — аналитические фазовые траектории медленного уравнения (см. рис. 83 б). В то же время в этом примере при некоторых значениях параметров  $a$  и  $b$  существуют негладкие вырожденные утки, служащие пределом фазовых траекторий (14<sub>ε</sub>).

Изучены также утки с релаксацией в  $\mathbb{R}^3$  [126]. Для гладких простых вырожденных уток в  $\mathbb{R}^n$  С. Н. Самборский [96] получил необходимые и достаточные условия существования такой малой (порядка  $\varepsilon$ ) деформации функций  $f$  и  $g$  в уравнении (13<sub>ε</sub>), что у продеформированного уравнения имеется решение, сходящееся к заданной вырожденной утке при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Эти условия являются условиями сочленения в критической точке  $p$  и состоят в следующем: если касательная к  $\gamma$  в точке  $p$  не вертикальна, то  $g(p) \neq 0$ , а если вертикальна, то  $dg/\partial x(p) \neq 0$ .

Заслуга открытия и исследования уток (1977) принадлежит группе французских и алжирских математиков, в которую входят Бенуа, Калло, Ф. Дьене, М. Дьене. Обзор и библиографию можно найти в работах ([73], [73: 1]).

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Литература по теории бифуркаций необъятна; например, библиография в [133] содержит около 700 работ. Библиография из 4405 работ по динамическим системам собрана Ширавой (Bibliography of dynamical systems, march 1985, compiled by K. Shiraiva, dep. of math., College of general education, Nagoya university, preprint series 1985, № 1, Nagoya, 390 p). К сожалению, она весьма неполно представляет теорию бифуркаций, особенно ее ранний период (до 1970 г.).

А. Пуанкаре в своей диссертации, в работах по теории равновесия вращающейся жидкости и по небесной механике заложил неформальные основы теории бифуркаций, включая, например, теорию версальных деформаций и технику нормальных форм. Формальные основы теории бифуркаций заложены А. А. Андроновым и его учениками [1]—[9], исходившими в своих исследованиях из прикладных задач. В частности, ими подробно изучена бифуркация рождения цикла при потере устойчивости положением равновесия, по недоразумению называемая зачастую бифуркацией Хопфа. К сожалению, ранние работы А. А. Андропова [1], [4], [5], [6] недостаточно широко известны на Западе.

Н. Н. Семенов [98] и Я. Б. Зельдович [74] исследовали важные практические приложения теории бифуркаций общего положения, включая также семейства бифуркаций, то есть то, что теперь называется «несовершенными бифуркациями» [151].

К раннему периоду исследования бифуркаций рождения цикла и торов относятся работы Ю. И. Неймарка [87], Н. Н. Брушлинской [44], В. К. Мельникова [85], Сакера [91]. В работах В. К. Мельникова и Сакера была исправлена ошибка Неймарка, открывшего бифуркацию рождения тора при потере устойчивости автоколебанием, но пропустившего случаи сильного резонанса. В [85] и [191] были предсказаны «главные системы» и основные черты их

версальных деформаций в случае слабых и сильных резонансов порядка, отличного от 4. Современные формулировки опубликованы Такенсом в 1974 г. (его доказательства до сих пор не появились), а для резонансов 1:1 — В. И. Арнольдом и 1972 г. [19] (доказательства опубликованы Р. И. Богдановым [43]). Случаи сильного резонанса исследованы В. И. Арнольдом [21]. Доказательства для резонансов порядка, отличного от 4, опубликованы лишь Е. И. Хорозовым [104]. О бифуркациях автоколебаний вблизи резонанса 1:4 см. [20], [21], [41], [42], [88].

Н. Н. Брушлинская [45], [46] применила теорию бифуркаций торов к гидродинамическим уравнениям Навье — Стокса — область, ставшая модной лишь после того, как Рюэль и Такенс объявили о ее связи с турбулентностью [190] (см., впрочем, доклад А. Н. Колмогорова «Эксперимент и математическая теория в изучении турбулентности» и Н. Н. Брушлинской [46] на заседании Московского математического общества 18 мая 1965 г.). Обзор современного состояния теории бифуркаций торов, написанный Броером, см. в [129]. Бифуркация рождения цикла в гидродинамике исследовалась также В. И. Юдовичем [118] и подробно обсуждается в книге [173]. Эта книга ценна также обширным списком литературы. Ориентированное на вычислителя изложение теории и приложений бифуркации рождения цикла содержится в [160]. Бифуркации в распределенных системах и их приложения к теории горения обсуждаются в обзорах [54], [55]. О бифуркациях торов, рождающихся при потере устойчивости автоколебаний, см. [34], [123].

Анализ бифуркаций фазовых портретов в окрестности положений равновесия в типичных однопараметрических семействах многомерных систем был обоснован после того, как появилась общая теорема сведения А. Н. Шоштайшвили [117], сводящая исследование произвольных локальных семейств к исследованию их ограничений на центральное многообразие. Важно отметить, что типичность редуцированного семейства равносильна типичности исходного; это также доказано в [117]. Само существование центрального многообразия установлено ранее В. А. Плиссом [19:70] (при отсутствии неустойчивого многообразия), а для общего случая — Кэли [173:1] и Хиршем, Пью и Шубом, (1971) подробное изложение — в [162].

Бифуркации фазовых портретов вблизи положения равновесия в типичных дипараметрических семействах полностью исследованы для случая двух нулевых собственных значений Р. И. Богдановым [43]. Изучение бифуркаций в случае двух мнимых пар собственных значений или одного нуля и одной мнимой пары после перехода к амплигудам приводит к исследованию бифуркаций в семействах векторных полей на плоскости с инвариантной парой прямых или инвариантной прямой соответственно. Трудности этого исследования оказались весьма значительными. После ряда попыток [19], [59], [60], [105], [157], [158] они были преодолены Жолондеком (п. п. 4.5, 4.6 главы I и [72]). Исследование бифуркаций фазовых портретов в локальном трехпараметрическом семействе векторных полей, содержащем росток с двумя нулевыми собственными значениями особой точки и дополнительным вырождением в нелинейных членах, в основном проведено в [141], [119], в статье Ф. С. Березовской и А. И. Хибника в сборнике «Методы качественной теории дифференциальных уравнений» (Горький, 1985, 128—138), и закончено в препринте R. Roussarie, On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields. Preprint, Université de Bourgogne, 1986, 36 p.

Наибольшую сложность в исследовании бифуркаций положения равновесия на плоскости представляет задача о рождении предельных циклов. Как правило, основная часть решения этой задачи сводится к исследованию абелевых или сходных с ними интегралов по фазовым кривым специальной гамильтоновой системы. Эти исследования проводятся либо чисто вещественными методами [43], [72], [88], либо с помощью выхода в комплексную область с применением теоремы Пикара — Лефшеца, теории эллиптических интегралов и уравнений Пикара — Фукса [75], [76], [93], [104], [119], [141], [193].

«Опасные» и «безопасные» участки границы устойчивости исследованы Н. Н. Баутиным [35] (см. также [37]). Величина «опасных» и «безопасных»



уклонений от границы устойчивости вблизи всех ее стратон до коразмерности 3 исключительно оценена Л. Г. Хазинным и Э. Э. Шнолем [103].

Нормальные формы локальных векторных полей и диффеоморфизмов (по отношению к аналитическим, гладким и, прежде всего, конечногладким заменам) исследованы в [26 : 18], [38], [39], [64], [77], [97], [202]. Об универсальности Фейгенбаума см. обзор [57] и книгу [135], где указана обширная библиография.

Ранний период исследования нелокальных бифуркаций векторных полей на плоскости и сфере подытожен в [9], [36]. Структурная устойчивость и бифуркации векторных полей на двумерных поверхностях, отличных от плоскости и сферы, исследованы сравнительно недавно [185], [199] — [201]. С гипотезой о глобальных бифуркациях в однопараметрических семействах векторных полей на сфере (п. 2.2, гл. 3) тесно связана работа [169].

Нелокальные бифуркации многомерных систем исследованы, в основном, математиками школы А. А. Андропова. О бифуркациях гомоклинических траекторий негиперболического седла см. работы Л. П. Шильникова [109], [110], [113]. О бифуркациях гомоклинических траекторий негиперболического седла см. [28], [31], [33], [180], гиперболического седла — [111], [112], [114], [147]. О бифуркациях контуров (на Западе называемых циклами) см. [30], [58], [62], [66], [139], [176]—[178], [180], [183]. Нелокальным бифуркациям в типичных двупараметрических семействах посвящены работы [49], [50], [65]—[67], [80], [81]. О цепочке бифуркаций, приводящих от точечного аттрактора к аттрактору Лоренца, см. [29], [101], [173]. О различных понятиях аттрактора см. [100], [101], [158], [173], [174], [181], [198].

Существенное значение для нелокальной теории бифуркаций имеет дифференциальная динамика [181], [198] и символическая динамика (в качестве общей ссылки укажем книгу В. М. Алексеева [14 : 1]).

Термин «релаксационные колебания» введен Ван дер Полем [206]. Ранний период развития теории релаксационных колебаний подытожен в [3], где содержатся многочисленные приложения. Обсуждению связи медленных движений в системах релаксационного типа с истинными движениями посвящены работы А. Н. Тихонова, А. Б. Васильевой и И. С. Градштейна [102], [53], [68]. Об асимптотике решений вблизи момента срыва см. работы Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова и других [94], [86], [70]. Явление затягивания точки устойчивости в аналитической быстро-медленной системе при переходе пары собственных значений особой точки уравнения быстрых движений через мнимую ось описано на примере в работе ученицы Л. С. Понтрягина М. А. Шишковой [116]. Для уравнений общего положения это явление исследовано А. И. Нейштадтом [90].

Решения-утки быстро-медленных систем открыты и исследованы в работах [126]—[128], [96]; см. также обзор [73].

В качестве примера работы о стохастизации релаксационных колебаний укажем статью Н. Н. Ченцовой [106].

О применении метода усреднения в теории релаксационных колебаний см. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.

Мы оставили в этом обзоре в стороне обширную и быстро развивающуюся теорию бифуркаций систем с симметриями. Обилие разнообразных групп симметрий и их приложений, а также распространенность задач с симметриями в приложениях делают эту область очень привлекательной: здесь уже при малом числе параметров типичны сложные бифуркационные диаграммы. С современным состоянием этой теории можно ознакомиться по статьям и книге Голубицкого и Шеффера [150—153]; см. также [136], [145], [146], [148], [149], [195]—[197].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Математические проблемы теории автоколебаний. В кн.: Первая Всес. конф. по автоколебаниям. МЛ ГТТИ, 1933, 32—71
2. —, Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956, 538 с.

3. —, *Витт А. А., Хайкин С. Э.*, Теория колебаний. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959, 926 с.; 1-е изд. М.-Л., 1937, 520 с.
4. —, *Леонтович Е. А.*, К теории структуры разбегания плоскости на траектории. Докл. АН СССР, 1938, 21, вып. 2, 427—430
5. —, —, Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1939, вып. 6, 3—24
6. —, —, Динамические системы 1-й степени негрубости на плоскости. Мат. сб., 1965, 68, № 3, 328—372
7. —, —, Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости. Дифференц. уравнения (Минск), 1970, 6, вып. 12, 2121—2134
8. —, —, *Гордон И. И., Майер А. Г.*, Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966, 568 с.
9. —, —, —, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967, 487 с.
10. —, *Любина А. Д.*, Применение теории Пуанкаре о точках бифуркации и смене устойчивости к простейшим автоколебательным системам. ЖЭТФ, 1935, вып. 5, 3—4, 296—309
11. —, *Понтрягин Л. С.*, Грубые системы. Докл. АН СССР, 1937, 14, № 5, 247—250
12. *Аносов Д. В.*, О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Мат. сб., 1960, 50, вып. 3, 299—334
13. — Вступительная статья. В сб. «Гладкие динамические системы». М.: Мир, 1977, 7—31
14. —, *Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З.*, Гладкие динамические системы. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, 1985, 1, 151—242.
15. *Арансон С. Х.*, Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному предельному циклу, у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях. Мат. сб., 1968, 76, вып. 2, 214—230
16. —, Динамические системы на двумерных многообразиях. В сб. «Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям». Киев, 1970, 2, 46—52
17. —, *Жужома Е. В., Малкин М. И.*, О взаимосвязи между гладкими и топологическими свойствами преобразований окружности (теоремы типа Данжуа). Горьк. ун-т, Горький, 1984. 152 с., Библиогр. 44 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 1984, № 3052—84 Деп.)
18. *Арнольд В. И.*, Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности в окружность. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, 25, вып. 1, 21—86
19. —, Лекции о бифуркациях и версальных семействах. Успехи мат. наук, 1972, 27, вып. 2, 119—184
20. —, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
21. —, Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей. Функциональный анализ и его прил., 1977, 11, вып. 2, 1—10
22. —, Перестройки особенностей потенциальных потоков и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве. Тр. семинаров им. И. Г. Петровского, 1982, вып. 8, 21—57
23. —, Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. Успехи мат. наук, 1983, 38, вып. 4, 189—203
24. — Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1984, 272 с.
25. —, *Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.*, Особенности дифференцируемых отображений. I. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982, 304 с.
26. —, *Ильяшенко Ю. С.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, 1985, 1, 7—149

27. —, *Козлов В. В., Нейштадт А. И.*, Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, 1985, 3, 9—309
28. *Афраймович В. С.*, О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с возникновением счетного множества периодических движений. Горький, ГГУ, 1974
29. —, *Быков В. В., Шильников Л. П.*, О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. Тр. Моск. мат. о-ва, 1982, 44, 180—212
30. —, *Шильников Л. П.*, Об особых траекториях динамических систем. Успехи мат. наук, 1972, 5, № 3, 189—190
31. —, —, О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. Докл. АН СССР, 1974, 219, № 3, 1281—1285
32. —, —, О достижимых переходах от систем Морса — Смейла к системам со многими периодическими движениями. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 6, 1248—1288
33. —, —, О бифуркации коразмерности 1, приводящей к возникновению счетного множества торов. Докл. АН СССР, 1982, 262, № 4, 777—780
34. —, —, Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность. В сб. «Методы качественной теории дифференциальных уравнений». Горький, 1983, 3—26
35. *Баутин Н. Н.*, Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949, 164 с.
36. —, *Леонтович Е. А.*, Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976, 496 с
37. —, *Шильников Л. П.*, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений («опасные» и «безопасные» границы). В кн. [173] (русский перевод), стр. 294—316
38. *Белицкий Г. Р.*, Эквивалентность и нормальные формы ростков гладких отображений. Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 1, 95—155
39. —, Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев.: Наукова думка, 1979, 176 с.
40. *Беляков Л. А.*, О бифуркационном множестве в системе с гомоклинической кривой седла. Мат. заметки, 1980, 28, вып. 6, 911—922
41. *Березовская Ф. С., Хибник А. И.*, К задаче о бифуркациях автоколебаний вблизи резонанса 1:4. Препринт НИВЦ АН СССР, Пущино, 1979, 24 с.
42. —, —, О бифуркациях сепаратрис в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса 1:4. Прикл. мат. и мех. 1980, 44, вып. 5, 938—943
43. *Богданов Р. И.*, Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости. Тр. семинаров им. И. Г. Петровского, 1976, вып. 2, 23—36; Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел, там же, 37—65
44. *Брушлинская Н. Н.*, Качественное интегрирование одной системы  $n$  дифференциальных уравнений в области, содержащей особую точку и предельный цикл. Докл. АН СССР, 1961, 139, вып. 1, 9—12
45. —, О поведении решений уравнений гидродинамики при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. Докл. АН СССР, 1968, 162, вып. 4, 731—734
46. —, Возникновение циклов и торов при закритических значениях числа Рейнольдса. Успехи мат. наук, 1965, 20, вып. 5, 259—260
47. —, Теорема конечности для семейства векторных полей в окрестности особой точки типа Пуанкаре. Функци. анализ и его прил., 1971, 5, вып. 3, 10—14
48. *Бунимович Л. А., Песин Я. В., Синай Я. Г., Якобсон М. В.*, Эргодическая теория гладких динамических систем. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, 1985, 2, 113—232

49. *Быков В. В.*, О рождении периодических движений из сепаратрисного контура трехмерной системы. Успехи мат. наук, 1977, 32, вып. 6, 213—214
50. —, О бифуркациях динамических систем, близких к системам с сепаратрисным контуром, содержащим седло-фокус. В сб. «Методы качественной теории дифференциальных уравнений». Горький, 1980, 44—72
51. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немецкий В. В.*, Теория показателей Ляпунова, М.: Наука, 1966, 576 с.
52. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.*, Теория ветвления нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969, 527 с.
53. *Васильева А. Б.*, О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры при производных. Мат. сб., 1952, 31, вып. 3, 587—644
54. *Волперт А. И.*, Волновые решения параболических уравнений. ОИХФ АН СССР, Черногловка, Препринт, 1983, 48 с.
55. *Волперт В. А.*, Бифуркации нестационарных режимов распространения волн. ОИХФ АН СССР. Черногловка. Препринт, 1982, 62 с.
56. *Воронин С. М.*, Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения. Функц. анализ и его прил., 1982, 16, вып. 2, 21—29
57. *Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.*, Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм. Успехи мат. наук, 1984, 39, вып. 3, 3—37
58. *Гаврилов Н. К.*, О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур. Мат. заметки, 1973, 14, вып. 5, 687—697
59. —, О некоторых бифуркациях состояния равновесия с одним нулевым и парой чисто мнимых корней. В сб. «Методы качественной теории дифференциальных уравнений». Горький, 1978, 33—40
60. —, О бифуркациях состояния равновесия с двумя парами чисто мнимых корней. В сб. «Методы качественной теории дифференциальных уравнений». Горький, 1980, 17—30
61. —, *Шильников Л. П.*, О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I. Мат. сб., 1972, 88, № 8, 475—492
62. —, —, О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. II. Мат. сб., 1973, 90, № 1, 139—156
63. *Гапанов-Грехов А. В., Рабнович М. И.*, Нелинейная физика, стохастичность и структуры. В кн. «Физика XX века. Развитие и перспективы». М.: Наука, 1984, 219—280
64. *Гомозов Е. П.*, Эквивалентность семейств диффеоморфизмов конечного класса гладкости. Вестн. Харьков. ун-та. Сер. мех.-мат., 1976, 134, вып. 41, 95—104
65. *Гонченко С. В.*, Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. Мат. заметки, 1983, 33, вып. 5, 745—755
66. —, О некоторых основных бифуркациях в одном двухпараметрическом семействе систем с гомоклиническими кривыми. Горьк. ун-т. Горький, 1984. 26 с. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 30.09.83 г. № 5432—83 Деп.)
67. —, Бифуркации удвоения в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. В кн. «Методы качественной теории дифференциальных уравнений». Горький, 1980, 31—43
68. *Грабштейн И. С.*, Применение теории устойчивости А. М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Мат. сб., 1953, 32, вып. 2, 263—286
69. *Дородницын А. А.*, Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля. Прикл. мат. и мех., 1947, 11, вып. 3, 313—328
70. *Жаров М. И., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.*, О некоторых специальных функциях и константах, возникающих в теории релаксационных колебаний. Докл. АН СССР, 1981, 261, вып. 6, 1292—1296
71. *Железцов Н. А.*, К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика, 1958, 1, вып. 1, 67—78

72. Жолондек Х., О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости. Мат. сб., 1983, 120, вып. 4, 473—499
73. Звонкин А. К., Шубин М. А., Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук, 1984, 39, вып. 2, 77—127
74. Зельдович Я. Б., К теории теплонапряженности. Ж. техн. физики, 1941, 9, вып. 6, 493—508
75. Ильяшенко Ю. С., О нулях специальных абелевых интегралов в вещественной области. Функци. анализ и его прил., 1977, 11, вып. 4, 78—79
76. —, Кратность предельных циклов, возникающих при возмущении гамильтонова уравнения класса  $\omega' = P_2/Q_1$  в вещественной и комплексной области. Тр. семинаров им. И. Г. Петровского, 1978, вып. 3, 49—60
77. Костов В. П., Версальные деформации дифференциальных форм степени  $n$  на прямой. Функци. анализ и его прил., 1984, 18, вып. 4, 81—82
78. Ландау Л. Д., К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, 44, вып. 8, 339—342
79. Леонтович Е. А., О рождении предельных циклов от сепаратрис. Докл. АН СССР, 1951, 78, вып. 4, 641—644
80. Лукьянов В. И., О бифуркациях динамических систем с петлей сепаратрисы «седло-узла». Дифференц. уравнения, 1982, 18, вып. 9, 1493—1506
81. —, Шильников Л. П., О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. Докл. АН СССР, 1978, 243, № 1, 26—29
82. Майер А. Г., Грубое преобразование окружности в окружность. Уч. зап. ГГУ, 1939, вып. 2, 215—229
83. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения. М.—Л.: Гостехиздат, 1952, 432 с
84. Медведев В. С., О новом типе бифуркации на многообразиях. Мат. сб., 1980, 113, № 3, 487—492
85. Мельников В. К., Качественное описание резонансных явлений в нелинейных системах. Дубна, ОИЯФ, Препринт, Р—1012, 1962, 17 с.
86. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975, 248 с.
87. Неймарк Ю. И., О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров. Докл. АН СССР, 1959, 129, вып. 4, 736—739
88. Нейштадт А. И., Бифуркации фазового портрета одной системы уравнений, возникающей в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса 1 : 4. Прикл. мат. и мех., 1978, 42, вып. 5, 830—840
89. —, О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой. Прикл. мат. и мех., 1984, 48, вып. 2, 197—204
90. —, Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось. Успехи мат. наук, 1985, 40, вып. 5, 190—191
91. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., ГИТТЛ, 1949, 550 с.
92. Ноздрачева В. П., Бифуркации негрубой петли сепаратрисы. Дифференц. уравнения (Минск), 1970, 18, № 9, 1551—1558
93. Петров Г. С., О числе нулей полных эллиптических интегралов. Функци. анализ и его прил., 1984, 18, вып. 2, 73—74
94. Понтрягин Л. С., Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, 21, вып. 5, 605—626
95. —, Родыгин Л. В., Приближенное решение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Докл. АН СССР, 1960, 131, вып. 2, 255—258
96. Самборский С. Н., Предельные траектории нелинейных сингулярно возмущенных, дифференциальных уравнений. Докл. АН УССР, 1985, вып. 8, 96—99
97. Самовол В. С., Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Тр. Моск. мат. о-ва, 1982, 44, 213—234

98. Семенов Н. Н., Цепные реакции, Л.: Госхимтехиздат, 1934, 555 с.
99. Серебрякова Н. Н., Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений теории колебаний. Прикл. мат. и мех., 1963, 27, вып. 1, 160—166
100. Синай Я. Г., Стохастичность динамических систем. В кн.: «Нелинейные волны». М.: Наука, 1979, 192—212
101. Странные аттракторы. Сборник статей. М.: Мир, 1981, 253 с.
102. Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Мат. сб., 1952, 31, вып. 3, 575—586
103. Хазин Л. Г., Шноль Э. Э., Об устойчивости положений равновесия в критических случаях и случаях, близких к критическим. Прикл. мат. и мех., 1981, 45, вып. 4, 595—604. Устойчивость критических положений равновесия. АН СССР, Пушкино, 1985, 215 с.
104. Хорозов Е. И., Версальные деформации эквивариантных векторных полей для случаев симметрии порядка 2 и 3. Тр. семинаров им. И. Г. Петровского, 1979, вып. 5, 163—192
105. —, Бифуркации векторного поля в окрестности особой точки в случае двух пар чисто мнимых собственных чисел. Докл. Болг. АН. I, 1981, 34, вып. 9, 1221—1224; II, 1981, 35 вып. 2, 149—152
106. Ченцова Н. Н., Исследование одной модельной системы квазистохастических релаксационных колебаний. Успехи мат. наук, 1982, 37, вып. 5, 205—206
107. —, Исследование квазистохастического режима автогенератора на туннельном диоде. В сб. «Методы качественной теории дифференциальных уравнений». Горький, 1983, 95—117
108. Шильников Л. П., Теория бифуркаций и модель Лоренца. В кн. [173] (русский перевод), 1980, 317—335
109. —, О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. Мат. сб., 1963, 61, вып. 4, 433—466
110. —, О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же. Докл. АН СССР, 1966, 170, № 1, 48—52
111. —, О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса. Докл. АН СССР, 1967, 172, № 1, 54—57
112. —, О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. Мат. сб., 1968, 77, № 3, 461—472
113. —, Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем, Докл. АН СССР, 1969, 189, № 1, 59—62
114. —, К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус. Мат. сб., 1970, 81, № 1, 92—103
115. —, Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре. В кн. «VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen». Band 1, 2, Akademie Verlag, Berlin, 1977, 279—293
116. Шитикова М. А., Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Докл. АН СССР, 1973, 209, № 3, 576—579
117. Шошитайшвили А. Н., Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки. Тр. семинаров им. И. Г. Петровского, 1975, вып. 1, 279—309
118. Юдович В. И., Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Прикл. мат. и мех., 1965, 29, вып. 3, 453—467
119. Яковенко С. Ю., О вещественных нулях одного класса абелевых интегралов, возникающих в теории бифуркаций. В сб. «Методы качественной теории дифференциальных уравнений». Горький, 1984, 175—185
120. Afraimovich V. S., Strange attractors and quasiattractors. In: Nonlinear and turbulent processes in physics. Edited by R. Z. Sagdeev. Harwood Acad. Publ., 1984, 1133—1138

121. Applications of bifurcation theory. Proc. Symp. Wisc. Oct. 1976. Acad. Press, 1977, 389 pp.
122. *Armbruster D., Dangelmayr G., Gütinger W.*, Imperfection sensitivity of interacting Hopf and steady-state bifurcations and their classification. *Physica*, 1985, *16D*, № 1, 99—123
123. *Aronson D. G., Chory M. A., McGehee R. P., Hall G. R.*, Bifurcation from an invariant circle for two parameter families of maps of the plane. *Commun Math. Phys.*, 1982, *83*, № 3, 303—354
124. *Belair J., Glass L.*, Universality and self-similarity in the bifurcations of circle maps. *Physica*, 1985, *16D*, № 2, 143—154
125. *Belykh V. N., Pedersen N. F., Soerensen O. H.*, Shunted Josepson junction model, II. The nonautonomous case. *Phys. Rev. B*, 1977, *14* № 11, 4860—4871
126. *Benoit E.*, Canards de  $\mathbb{R}^3$ . These. Paris, 1983
127. —, Enlacements de canards. *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, sér. 1, 1985, *300*, № 8, 225—230
128. —, *Callot J.-L., Diener F., Diener M.*, Chasse au canards. *Collect. Math.*, 1980, *31*, № 1
129. *Bruter C. P., Arangol A., Lichnerowicz A. D.* (Eds.) Bifurcation theory, mechanics and physics. Reidel, Dordrecht, 1983, 388 pp.
130. *Chenciner A.*, Courbes fermes invariants non normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégenérée de difféomorphismes  $\mathbb{R}^2$ . *Comptes rendus Acad. Sci.*, 1981, *292*, ser. 1, 507—510
131. —, Bifurcations de points fixes elliptiques II. Orbit périodiques et ensembles de Cantor invariants. *Invent. math.*, 1985, *80*, № 1, 81—106
132. —, *Iooss G.*, Bifurcations des tores invariants. *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 1979, *69*, № 2, 109—198
133. *Chow S. N., Hale J. K.*, Methods of bifurcation theory. Springer, 1982, 515 pp.
134. —, —, *Mallet-Paret J.* Applications, of generic bifurcations. *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 1975, *59*, № 2, 159—188; 1976, *62*, № 3, 209—236
135. *Collet P., Eckmann J.-P.*, Iterated maps on the interval as dynamical systems. Birkhäuser. Boston, 1980, 248 pp.
136. *Dangelmayr G., Armbruster D.*, Classification of  $Z(2)$ -equivariant imperfect bifurcations with corank 2. *Proc. London, Math. Soc.*, 1983, *46*, № 4, 517—546
137. *De Melo W., Palis J.*, Moduli of stability for difféomorphisms. *Lect. Notes Math.*, 1980, *819*, 318—339
138. —, —, Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New York, Heidelberg, Berlin, Springer, 1982, 198 pp.
139. —, —, *Van Strein S. J.*, Characterising difféomorphisms with modulus of stability one. *Lect. Notes Math.*, 1981, *898*, 266—285
140. *Dufour J. P.*, Stabilité simultanée de deux fonctions. *Ann. Inst. Fourier*, 1979, *29*, № 1, 262—282
141. *Dumortier F., Roussarie R., Sotomayor J.*, Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The casp case of codimension 3. Preprint, 1985, 56 pp.
142. Dynamical systems and bifurcations. Proceedings, Groningen 1974. *Lect. Notes Math.* 1985, *1125*, 129 p.
143. *Feigenbaum M. J.*, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 1978, *19*, № 1, 25—52
144. *Fenichel R.*, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.*, 1971, *21*, № 3, 193—226
145. *Field M.*, Unfolding of a class of  $SO(2)$ -invariant difféomorphisms. Univ. of Sidney. Preprint, 1984, 69 pp.
146. —, Unfolding equivariant difféomorphisms. Univ. of Sidney. Preprint, 1984, 71 pp.
147. *Gaspard P.*, Generation of countable set of homoclinic flows through bi-

- furcation in multidimensional systems. Bull. sci. Acad. roy. Belg., 1984, 70, № 2, 61—83
148. *Golubitsky M., Keylitz B. L., Schaeffer D.*, A singularity theory analysis of a thermal chainbranching model for the explosion peninsula. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1981, 34, № 5, 433—463
  149. —, *Langford W. F.*, Classification on and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations. *J. Different. Equat.* 1981, 41, № 3, 375—415
  150. —, *Schaeffer D.*, Imperfect bifurcations in the presence of symmetry. *Communs Math. Phys.* 1979, 67, № 2, 205—232
  151. —, —, A theory for imperfect bifurcations via singularity theory. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1979, 32, № 1, 21—98
  152. —, —, Bifurcations with  $O(3)$  symmetry including applications to the Benard problem. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1982, 35, № 1, 81—111
  153. —, —, Bifurcations and groups in bifurcation theory. *Appl. Math. Sci.*, 1985, 15, 320 pp.
  154. —, *Stewart J.*, Hopf bifurcation in the presence of symmetry. Univ. of Houston. Preprint, 1974, 94 p.
  155. *Grebogi C., Ott E., York J. A.*, Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient to chaos. *Physica*, 1983, 7D, № 2, 181—200
  156. *Guckenheimer J.*, One parameter families of vector fields on two—many-folds: another non-density theorem. In: *Dynamical systems*, Edited by  $M_1$  Peixoto, Acad. Press., 1973, 111—127
  157. —, Multiple bifurcation problems of codimension two. *SIAM J. Math. Anal.*, 1984, 15, № 1, 1—49
  158. —, *Holms Ph.*, Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. Springer, 1983, 453 p.
  159. *Hartman Ph.*, Ordinary differential equations. New York, 1964, 612 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хартман Ф.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с.)
  160. *Hassard B. D., Kazarinoff N. D., Wan Y.-H.*, Theory and applications of Hopf bifurcations. *London Math. Soc. Lect. Notes*, Cambridge Univ. Press, 1981, 41, 311 pp.
  161. *Henon M.*, A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communs Math. Phys.*, 1976, 50, № 1, 69—78
  162. *Hirsh M. W., Pugh C. C., Shub M.*, Invariant manifolds. *Lect. Notes Math.*, 1977, 583, 149 pp.
  163. *Hopf E.*, A mathematical example, displaying the featur of turbulence. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1948, 1, 303—322
  164. *Iooss G., Joseph D. D.*, Elementary stability and bifurcation theory. Springer, 1980 (Пер. на рус. яз.: *Иосс Ж., Джозеф Д.*, Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983, 300 с.)
  165. *Jonker L., Rand D.*, Bifurcations in one dimension I. *Invent. math.*, 1981, 62, № 3, 347—365
  166. *Lefschetz S.*, Differential equations: geometric theory. New York, 1957, 390 pp. (Пер. на рус. яз.: *Левшец С.*, Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1961, 287 с.)
  167. *Levi M.*, Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1981, 32, № 244, 147 pp.
  168. *Lorenz E. N.*, Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, 20, 130—141 (Пер. на рус. яз.: *Лоренц Э. Н.*, Детерминированное непериодическое течение. В сб. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 88—116)
  169. *Malta I. P., Palis J.*, Families of vector fields with finite modulus of stability. *Lect. Notes Math.*, 1981, 898, 212—229
  170. *Manneville P., Pomeau Y.*, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communs Math. Phys.*, 1980, 74, № 2, 189—197
  171. —, —, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Physica*, 1980, 1D, № 2, 219—224
  172. *Markley M. G.*, The Poincare-Bendixson theorem for the Klein bottle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, 135, 159—169



173. *Marsden J. E., McCracken M.*, The Hopf bifurcation and its applications. Springer, New York, 1976, 408 pp. (Пер. на рус. яз.: *Марсден Дж., Мак Кракен М.*, Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980, 368 с.)
174. *Milnor J.*, On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 2, 177—196
175. *Mittelman H. D., Weber H. (ed.)*, Bifurcation problems and their numerical solutions. Birkhäuser, Basel, 1981, 252 p.
176. *Newhouse S.*, Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology*, 1974, 12, № 1, 9—18
177. —, Asymptotic behavior and homoclinic points in nonlinear systems. *Nonlinear dynamics*, *Ann. Acad. Sci.*, 1980, 357, 292—299
178. —, *Palis J.*, Cycles and bifurcation theory. *Astérisque*, 1976, 31, № 1, 43—140
179. —, —, *Takens F.*, Stable arcs of diffeomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1976, 82, № 4, 499—502
180. —, —, —, Bifurcation and stability of families of diffeomorphisms. *Publ. math. Inst. hautes études. sci.*, 1983, 57, 5—71
181. *Nitecki Z.*, Differential dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1971, 282 pp. (Пер. на рус. яз.: *Нитецки З.*, Введение в дифференциальную динамику, М.: Мир, 1975, 304 с.)
182. *Palis J.*,  $\Omega$ -explosions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, 27, № 1, 85—91
183. —, A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability. *Astérisque*, 1978, 51, № 3, 335—346
184. —, *Pugh C.*, Fifty problems in dynamical systems. *Lect. Notes Math.*, 1975, 468, 345—353
185. *Peixoto M. M.*, Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, 1962, 1, № 2, 101—120
186. *Petrowskii I. G.* Über das Verhalten der Integralcurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes. *Mat. сб.*, 1934, 41, 107—155
187. *Poincaré H.*, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris, Gauthier-Villars, 1982, 1, 385 p.; 1893, 2, VIII+479 p.; 1899, 3, 414 p. (Пер. на рус. яз.: *Пуанкаре А.*, Новые методы небесной механики, в книге: Пуанкаре Н., Избранные труды. М.: Наука, 1971, 1, 771 с.; 1972, 2, 7—356)
188. *Robbin J.*, Unfolding of discrete dynamical systems. *Univ. of Wisconsin. Preprint*, 1983, 163 pp.
189. *Robinson C.*, Bifurcation to infinitely many sinks. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 90, № 3, 433—459
190. *Ruelle D., Takens F.*, On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, 1971, 20, № 2, 167—192; 1971, 23, № 3, 343—344 (Пер. на рус. яз.: *Рюэль Д., Такенс Ф.*, О природе турбулентности. В сб. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 117—151).
191. *Sacker R.*, On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. *New York University, Report IMM—NYU 333*, 1964. *Commun. Pure and Appl. Math.*, 1965, 18, № 4, 717—732
192. —, On invariant surface and bifurcation of periodic ordinary differential equations. *Thesis*, New York, 1964, 76 pp.
193. *Sanders J. A., Cushman R.*, Abelian integrals and global Hopf bifurcations. *Lect. Notes Math.*, 1985, 1125, 87—98
194. *Sattinger D. H.*, Topics in stability and bifurcation theory. *Lect. Notes Math.*, 1973, 309, 190 p.
195. —, Group representation theory, bifurcation theory and pattern function. *J. Funct. Anal.*, 1978, 28, № 1, 58—101
196. —, Group theoretic methods in bifurcation theory. *Lect. Notes Math.*, 1979, 762, 241 pp.

197. *Schaeffer D. G., Golubitsky M.*, Bifurcation analysis near a double eigenvalue of a model chemical reaction. *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 1981, 75, № 3, 315—347
198. *Smale S.*, Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, 73, № 6, 747—817 (Пер. на рус. яз.: *Смейл С.*, Дифференцируемые динамические системы. *Успехи мат. наук*, 1970, 25, вып. 1, 113—185).
199. *Sotomayor J.*, Generic bifurcation of dynamical systems. In: *Dynamical systems*, Peixoto M. (Ed.), Acad. Press, 1973, 561—582
200. —, Structural stability and bifurcation theory. In: *Dynamical systems*, Peixoto M. (Ed.), Acad. Press, 1973, 549—560
201. —, Generic one parameter families of vector fields on two dimensional manifolds. *Publ. Math. Inst. hautes étud. sci.*, 1974, 43, 1—46
202. *Takens F.*, Partially hyperbolic fixed points. *Topology*, 1971, 10, № 2, 133—147
203. —, Forced oscillations and bifurcations. *Communs. Math. Inst. Rijksuniversiteit Utrecht (Applications of global analysis. Simposium, Utrecht state university, February, 8, 1973)*, 1974, 3, 1—59
204. —, Constrained equations; a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions. *Lect. Notes Math.*, 1976, 525, 143—134 143—234
205. —, Global phenomena in bifurcations of dynamical systems with simple recurrence. *Jahres Dtsch. Math. Ver.*, 1979, 81, № 1, 87—96
206. *Van der Pol B.*, On relaxation oscillations. *Phil. Mag.*, 1926, 2, № 11, ser. 7, 978—992